

高次方程式 (1)

講師
矢作裕滋

学習のポイント

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ のような、2次方程式より次数の高い方程式を解く方法を学びましょう。

- ① 高次方程式
- ② 因数分解による解法 ~共通因数の利用~
- ③ 因数分解による解法 ~ $a^3 - b^3$ の因数分解の利用~

高次方程式

$2x^2 + 3x + 5 = 0$ のように表される方程式を2次方程式といった。

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 7 = 0$$

のような方程式を、それぞれ3次方程式、4次方程式という。

また、3次以上の方程式を、一般に高次方程式という。

高次方程式は、いつでも解けるとはかぎらないが、因数分解することによって簡単に解ける場合もある。

因数分解による解法 ~共通因数の利用~

例1 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

解答 左辺を因数分解すると

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

← x をくくり出す

$$x(x - 2)(x - 3) = 0$$

← $ABC = 0$ ならば

$$x = 0 \text{ または } x - 2 = 0 \text{ または } x - 3 = 0$$

$A = 0$ または $B = 0$ または $C = 0$

したがって、 $x = 0, 2, 3$

(2) $x^3 - 2x^2 - 2x = 0$

解答 左辺を因数分解すると

$$x(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ より}$$

解の公式を利用して解くと

解の公式

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を利用する。

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

※ $\sqrt{\quad}$ の中を計算して

$$\sqrt{4+8} \rightarrow \sqrt{12} \rightarrow 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

したがって、 $x=0, 1 \pm \sqrt{3}$

問1 次の方程式を解きなさい。

- (1) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$
- (2) $x^3 + x^2 - x = 0$

因数分解による解法 ～ $a^3 - b^3$ の因数分解の利用～

例2 方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解きなさい。

解答 左辺を因数分解すると

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \qquad \leftarrow a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

よって

$$x - 1 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{より} \quad x = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \qquad \leftarrow \sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

したがって、 $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

問2 次の方程式を解きなさい。

- (1) $x^3 + 1 = 0$
- (2) $x^3 - 8 = 0$

$$\leftarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

問1・解答

(1) $x = 0, 2, -4$ (2) $x = 0, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, -1$

問2・解答

(1) $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = 2, -1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$