

因数定理

講師
矢作裕滋

学習のポイント

因数分解しにくい整式を因数分解するときに役に立つ定理を学びましょう。

- ① 剰余の定理
- ② 因数定理
- ③ 因数定理を用いた因数分解

剰余の定理

x についての整式を $P(x)$ や $Q(x)$ などの記号で表す。また、整式 $P(x)$ の x に 2 を代入したときの値を $P(2)$ のように表す。

例1 $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ のとき

$$P(-1) = (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 = 3$$

※負の数を入力するときは、カッコをつける。

問1 $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ のとき、次の値を求めなさい。

- (1) $P(1)$ (2) $P(-2)$

$P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの商を $Q(x)$ 、余りを R とすると、

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R \quad \text{👉 (わられる式) = (わる式) \times (商) + (余り)}$$

と表すことができる。

この式に $x = \alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R \\ &= 0 \times Q(\alpha) + R \\ &= R \end{aligned}$$

よって次の定理が成り立つ。

【剰余の定理】

整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの余りは $P(\alpha)$ である

例2 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ を $x - 1$ でわったときの余りは、

$$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 3 = 2$$

問2 $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 1$ を次の式でわったときの余りを求めなさい。

- (1) $x - 2$ (2) $x + 1$ 👉 (2) $x + 1 = x - (-1)$

因数定理

剰余の定理で、 $P(\alpha) = 0$ のときは、余り $R = 0$ であるから、 $P(x)$ は $x - \alpha$ でわり切れる。

このとき、 $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ となる。

よって、 $x - \alpha$ は $P(x)$ の因数となり、次の定理が成り立つ。

【因数定理】

整式 $P(x)$ において

$$P(\alpha) = 0 \iff x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である}$$

例3 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ とする。

(1) $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 8 = -5$ であるから、 $x - 1$ は因数でない。

(2) $P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 4 \times 2 - 8 = 0$ であるから、 $x - 2$ は因数である。

問3 次の式が整式 $P(x) = x^3 - 5x + 2$ の因数であるかどうか調べなさい。

- (1) $x - 1$ (2) $x - 2$ (3) $x + 1$

因数定理を用いた因数分解

例4 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ を因数分解しなさい。

【解答】

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \text{ とおく}$$

$$P(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 0$$

よって、 $x - 1$ は $P(x)$ の因数である。

← $P(\alpha) = 0$ となる整数 α は、定数項 -2 の約数 $\pm 1, \pm 2$ の中から見つけるとよい。

右のわり算より

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 2x^2 - x - 2} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 3x^2 - x \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 2x - 2 \\ \underline{2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

さらに、 $x^2 + 3x + 2$ を因数分解して

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

問 4 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^3 + 4x^2 + x - 6$
- (2) $x^3 - x^2 - 17x - 15$
- (3) $x^3 + 3x^2 - 25x + 21$
- (4) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

Handwritten solution area with horizontal lines.

問 4・解答

(1) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 (2) $(x + 1)(x + 3)(x - 5)$
 (3) $(x - 1)(x - 3)(x + 7)$
 (4) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$

問 3・解答

(1) 因数ではない (2) 因数である (3) 因数ではない

問 2・解答

(1) 5 (2) -10

問 1・解答

(1) -3 (2) -21