

解と係数の関係

講師
矢作裕滋

学習のポイント

2次方程式の解と係数の間に成り立つ関係について学びます。

- ① 2次方程式の解と係数の関係
- ② 解と係数の関係の利用
- ③ 与えられた2つの数を解とする2次方程式

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ の解は、

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

解の和の値は、 $\frac{-5 + \sqrt{13}}{6} + \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

$3x^2 + 5x + 1 = 0$

解の積の値は、 $\frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \times \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} = \frac{(-5)^2 - (\sqrt{13})^2}{36}$

$$= \frac{25 - 13}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$3x^2 + 5x + 1 = 0$

【2次方程式の解と係数の関係】

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例1

$2x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 α と β の和と積を求めなさい。

解答

和は、 $\alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$ 積は、 $\alpha\beta = \frac{5}{2}$

問1 次の2次方程式の2つの解の和と積を求めなさい。

- (1) $5x^2 + 2x + 3 = 0$
- (2) $2x^2 + 3x - 4 = 0$
- (3) $x^2 - x - 1 = 0$

解と係数の関係の利用

例2 2次方程式 $x^2 + 6x - 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の値を求めなさい。

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$
- (2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
- (3) $\alpha^2 + \beta^2$

解答

$\alpha + \beta = -\frac{6}{1} = -6, \quad \alpha\beta = \frac{-5}{1} = -5$ を利用する。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-5) \times (-6) = 30$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ◀ $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 $= (-6)^2 - 2 \times (-5) = 46$

問2 2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の値を求めなさい。

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$
- (2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
- (3) $\alpha^2 + \beta^2$

与えられた2つの数を解とする2次方程式

例3 3と5を解とする2次方程式をつくりなさい。

解答

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \quad \leftarrow \text{因数分解によって、この2次方程式の解は } x = 3, 5$$

$$x^2 - (3 + 5)x + 3 \times 5 = 0$$

(和) (積)

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

【与えられた2つの数を解とする2次方程式】

2つの数 α, β を解とする2次方程式の1つは、

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

例4 2つの数 $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$ を解とする2次方程式をつくりなさい。

解答

2つの解の和と積を計算する。
 和の値は、 $(2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$
 積の値は、 $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$
 したがって、求める2次方程式は、
 $x^2 - 4x - 1 = 0$

問1・解答

(1) 和は $-\frac{5}{2}$, 積は $\frac{5}{3}$

(2) 和は $-\frac{3}{2}$, 積は $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(3) 和は $-\frac{1}{1} = -1$, 積は $\frac{1}{-1} = -1$

問2・解答

(1) 20

(2) $\frac{5}{4}$

(3) 6