

複素数 (2)

～複素数を用いた計算～

講師
矢作裕滋

2つの複素数が等しいとはどういうことなのかについて学びます。そして、複素数どうしの加減乗除、すなわち、たし算、ひき算、かけ算、わり算の計算方法を学習します。

学習のポイント

- ① 複素数の相等
- ② 複素数の計算
- ③ 共役な複素数

複素数の相等

複素数が等しいとは？

【複素数の相等】

$$a, b, c, d \text{ が実数のとき,} \\ a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d$$

※ 2つの複素数が等しいのは、その実部、虚部がともに等しいときに限る。

例1

次の等式を満たす実数 x, y を求めてみましょう。

$$(3x - 1) + (2y + 1)i = 5 - 7i$$

解答

左辺の複素数と右辺の複素数が等しくなればよいのですから、

実部が等しいという式は、 $3x - 1 = 5$

虚部が等しいという式は、 $2y + 1 = -7$

これらの x や y の1次方程式を解いて、

$$x = 2, y = -4$$

問1 次の等式を満たす実数 x, y を求めなさい。

(1) $(3x - 2) + (2 - 3y)i = 10 - 7i$

(2) $(x + 2) + (y - 1)i = 0$

複素数の計算

例 2

- (1) $3i - 5i = (3 - 5)i = -2i$
- (2) $(2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3i - 5i) = 3 - 2i$
- (3) $4i \times 3i = 12i^2 = 12 \times (-1) = -12$
- (4) $(2 + 3i)(1 - 5i) = 2 - 10i + 3i - 15i^2$
 $= 2 - 10i + 3i - 15 \times (-1)$
 $= 17 - 7i$

問 2

- (1) $2i + 7i$
- (2) $(2 - 4i) - (1 - i)$
- (3) $i \times 5i$
- (4) $(4 + 3i)(2 - 5i)$

共役な複素数

a, b を実数とすると、 $a + bi, a - bi$ を互いに共役な複素数という。

例 3

- (1) $3 + 2i$ と共役な複素数は、 $3 - 2i$
- (2) $-3i$ と共役な複素数は、 $3i$ ← $-3i$ は $0 - 3i$ と考える。

例 4 複素数の除法の問題

$(3 + i) \div (1 - i)$ を計算してみよう。

解答

$$\begin{aligned}
 (3 + i) \div (1 - i) &= \frac{3 + i}{1 - i} && \leftarrow \text{分数の形にする。} \\
 &= \frac{(3 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} && \leftarrow \text{分母の共役な複素数を分母分子にかける。} \\
 &= \frac{3 + 3i + i + i^2}{1 - i^2} && \leftarrow \text{分母分子ともに文字式と同じ計算。} \\
 &= \frac{3 + 4i - 1}{1 + 1} && \leftarrow i^2 = -1 \\
 &= \frac{2 + 4i}{2} && \leftarrow 2 \text{ で約分する。} \\
 &= 1 + 2i \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

