

二項定理

講師
川崎宣昭

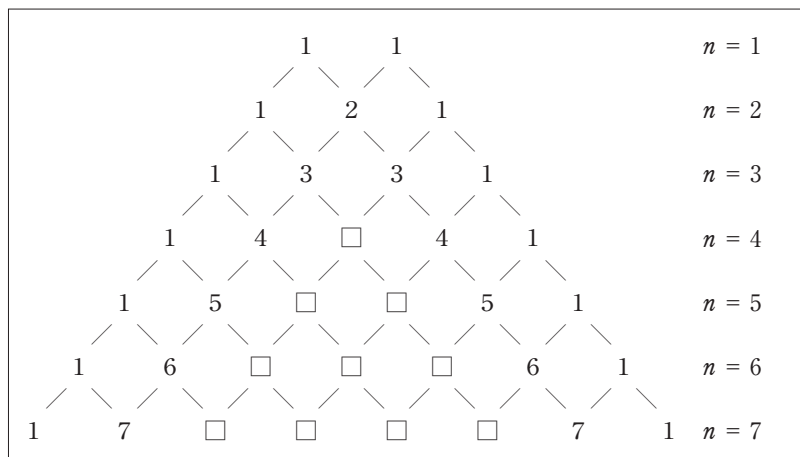
学習のポイント

$(a + b)^2$, $(a + b)^3$ の展開式については前回までに学びました。今回は、 $(a + b)^n$ の展開式について考えます。

- ① パスカルの三角形
- ② 記号 ${}_nC_r$ の意味
- ③ 二項定理

パスカルの三角形

$(a + b)^1 = a + b = 1a + 1b$ 係数は 1, 1
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 係数は 1, 2, 1
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 係数は 1, 3, 3, 1
 この先を予想してみてください！



規則①：各段の両端の数は
つねに1です。
 規則②：各段の両端以外の
数は、その左上の数
と右上の数をたした
ものになっています。

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

記号 ${}_nC_r$ の意味

- 5人から2人の代表を選ぶ方法 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ (通り)
- 6人から3人の代表を選ぶ方法 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ (通り)
- ${}_nC_0 = 1, {}_nC_n = 1$

【 ${}_nC_r$ の記号】

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}, \quad {}_nC_0 = 1$$

※ $(a+b)^4 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)}$ と考えてみよう。

- ↑ ← ↓
- a^4 の係数 ${}_4C_0 = 1$ ← 4か所の () から b を 0 か所選ぶ。
 - a^3b の係数 ${}_4C_1 = \frac{4}{1} = 4$ ← 4か所の () から b を 1 か所選ぶ。
 - a^2b^2 の係数 ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ ← 4か所の () から b を 2 か所選ぶ。
 - ab^3 の係数 ${}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$ ← 4か所の () から b を 3 か所選ぶ。
 - b^4 の係数 ${}_4C_4 = 1$ ← 4か所の () から b を すべて選ぶ。

二項定理

● $(a+b)^4$ の展開

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

● $(a+b)^5$ の展開

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

【二項定理】

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\ &\quad + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \end{aligned}$$

● 二項定理・パスカルの三角形の不思議

