第４回　第１章　方程式・式と証明　［整式・分数式の計算］

二項定理

講師
川﨑宣昭

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3$ の展開式については前回までに学びました。今回は、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n$ の展開式について考えます。

学習のポイント

① パスカルの三角形
② 記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ の意味
③ 二項定理

パスカルの三角形

$(a+b)^1 = a + b = 1a + 1b$　　係数は 1, 1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　係数は 1, 2, 1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$　　係数は 1, 3, 3, 1

この先を予想してみてください！

1　1	$n=1$
1　2　1	$n=2$
1　3　3　1	$n=3$
1　4　□　4　1	$n=4$
1　5　□　□　5　1	$n=5$
1　6　□　□　□　6　1	$n=6$
1　7　□　□　□　□　7　1	$n=7$

規則①：各段の両端の数はつねに１です。
規則②：各段の両端以外の数は、その左上の数と右上の数をたしたものになっています。

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ の意味

- **５人から２人の代表を選ぶ方法**　${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$（通り）
- **６人から３人の代表を選ぶ方法**　${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$（通り）
- ${}_n\mathrm{C}_0 = \mathbf{1}$, ${}_n\mathrm{C}_n = \mathbf{1}$

【${}_n\mathrm{C}_r$ の記号】

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}}{\boldsymbol{r(r-1)}\times\cdots\times 3\times 2\times 1},\qquad {}_n\mathrm{C}_0=1$$

※ $(a+b)^4=\underline{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)}$ と考えてみよう。

a^4 の係数　${}_4\mathrm{C}_0=1$　← 4か所の（　　）から b を 0 か所選ぶ。

a^3b の係数　${}_4\mathrm{C}_1=\dfrac{4}{1}=4$　← 4か所の（　　）から b を 1 か所選ぶ。

a^2b^2 の係数　${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$　← 4か所の（　　）から b を 2 か所選ぶ。

ab^3 の係数　${}_4\mathrm{C}_3=\dfrac{4\times 3\times 2}{3\times 2\times 1}=4$　← 4か所の（　　）から b を 3 か所選ぶ。

b^4 の係数　${}_4\mathrm{C}_4=1$　← 4か所の（　　）から b をすべて選ぶ。

二項定理

● **$(a+b)^4$ の展開**

$$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

● **$(a+b)^5$ の展開**

$$(a+b)^5={}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

【二項定理】

$$\boldsymbol{(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots}$$
$$\boldsymbol{+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n}$$

●**二項定理・パスカルの三角形の不思議**

1　1　　　$n=1$ → $1+1=2$

1　2　1　　　$n=2$ → $1+2+1=4$

1　3　3　1　　　$n=3$ → $1+3+3+1=8$

1　4　$\boxed{6}$　4　1　　　$n=4$ → $1+4+6+4+1=16$

1　5　$\boxed{10}$　$\boxed{10}$　5　1　　　$n=5$ → $1+5+10+10+5+1=32$

1　6　$\boxed{15}$　$\boxed{20}$　$\boxed{15}$　6　1　　　$n=6$ → ?

1　7　$\boxed{21}$　$\boxed{35}$　$\boxed{35}$　$\boxed{21}$　7　1　　　$n=7$ → ?