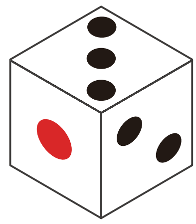
第31回

正多面体

講師
湯浅 弘一

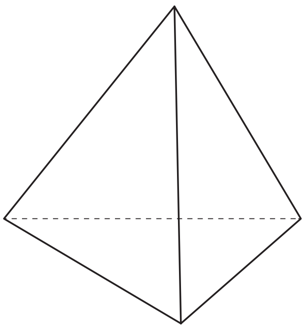
身近にあることは？



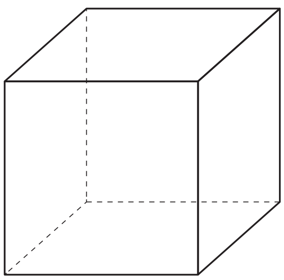
サイコロはどの面も正方形です。
さらに，１つの頂点には面が３つ集まって接しています。
このように，すべての面が合同な正多角形で構成され，
かつ，すべての頂点において接する面の数が同じある立体図形を
正多面体といいます。

確認しましょう

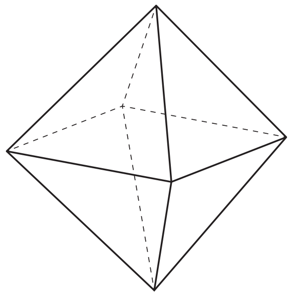
正多面体は５種類しかありません。



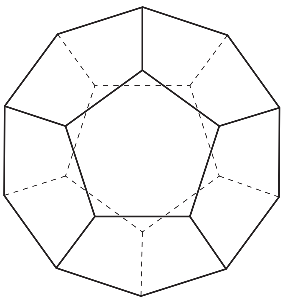
＜正四面体＞



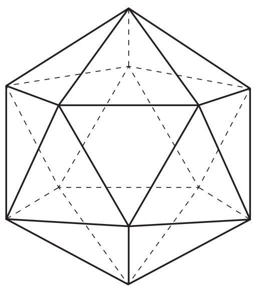
＜正六面体＞



＜正八面体＞



＜正十二面体＞



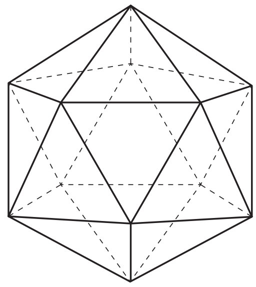
＜正二十面体＞

1

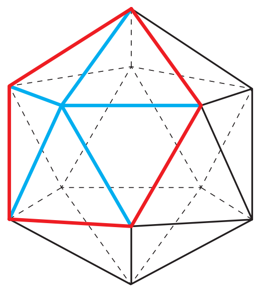
問題１

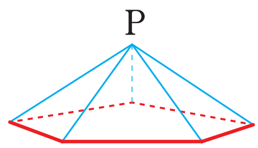
正二十面体の面の数，辺の数，頂点の数を求めなさい。

【考え方】



正二十面体ですから，面の数は２０です。
辺の数は…
数えても良いですが，数えているうちに混乱しそうですね。
そこで，面と面が接するところを考えましょう。
１辺と１辺が重なるので，１本＋１本が１本になります。
つまり２本がくっついて１本になるわけです。
この正二十面体をバラバラにすると，正三角形が２０枚できます。
１枚の正三角形につき３本の辺があるので，辺の数は ３×２０＝６０（本）あります。
この６０本が正２０面体になると，辺の２本がくっついて１本になるので半分になります。
したがって、正２０面体の辺の数は６０÷２＝３０（本）です。





次に頂点の数を考えてみましょう。
右の図のように
赤い正五角形を底面とする正五角錐が見えます。
この頂点の１つ点Ｐに着目すると，
点Ｐには正三角形が５つ接しています。
先程の辺の本数の数え方と同じように
５つの正三角形をバラバラにして考えると
点Ｐは元々５つの頂点が集まって１点になったわけです。
正二十面体の２０個の面をすべてバラバラにすると正三角形が２０枚。
１枚につき頂点が３個ありますが，これらが重なって５つの頂点が接して（くっついて）１つの頂点になるので，全体の５分の１になるので，

正二十面体の頂点の数は $3\times 20\times\frac{1}{5}=12$（個）です。

問題２

正十二面体の面の数、辺の数、頂点の数を求めなさい。

【考え方】

まず，面の数は１２。

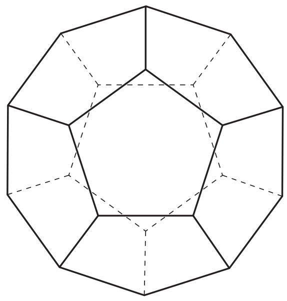
辺の数は正二十面体のときと同様にして

１つの面と１つの面が１つの辺で接するとき，

２本の辺が１辺になります。

正十二面体をすべてバラバラにすると

正五角形が１２個ですから，辺の数は ５×１２÷２＝３０（本）です。



次に頂点の数は，

正十二面体をバラバラにした１２面の正五角形の頂点が全部で ５×１２＝６０（個）

正十二面体の１つの頂点に面が３つ接していることに注意して，

正十二面体の頂点の数は ６０÷３＝２０（個）です。

参考

＜オイラーの多面体定理＞

表をよく見ると，

双対以外にも何か規則性がある

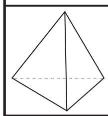
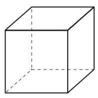
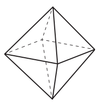
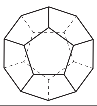
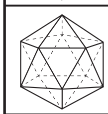
ことに気づきませんか？

(面の数)＋(頂点の数)－(辺の数)＝２

となります。

これをオイラーの多面体定理

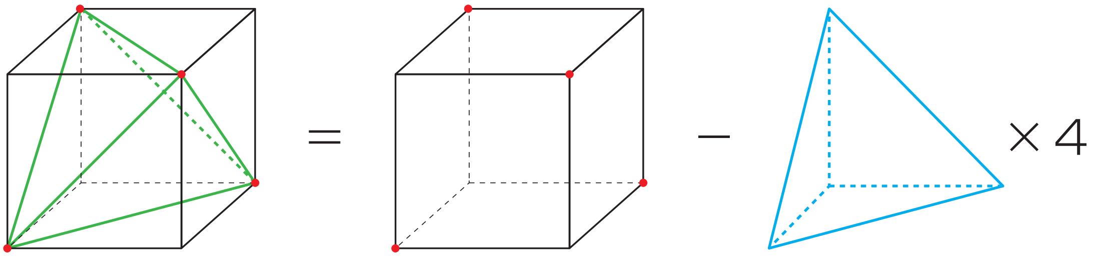
といいます。

	面の数	頂点の数	辺の数
 正四面体	4	4	6
 正六面体	6	8	12
 正八面体	8	6	12
 正十二面体	12	20	30
 正二十面体	20	12	30

問題３

１辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体の体積を求めなさい。

【考え方】



上のような立方体を考えると，立方体から４つの小三角錐を引けば正四面体ができます。
立方体の各面は正方形です。
この対角線の長さが正四面体の１辺の長さになっているので，
直角二等辺三角形の辺の比が１ ： １ ：$\sqrt{2}$ であることを使うと，
この立方体の１辺の長さは１であることがわかります。
ですから、立方体の体積は　$1 \times 1 \times 1 = 1$
小三角錐の体積は

$$\text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

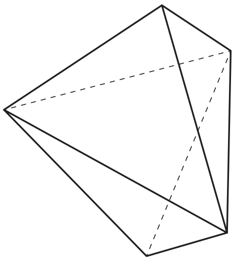
よって求める体積は，
（立方体の体積）－（小三角錐の体積）×４　で求められるので，

$$1 - \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

となります。

問題４

右の図は正四面体を２つつなげた立体です。
これは正六面体といえますか？



【考え方】
答えは，いえません。
正多面体ならば１つの頂点に接している面の数がどこでも同じですが，この立体は３面と４面の２種類があります。（ちなみにこの立体の名前は双三角錐といいます。）