第39回

集　合

講師
湯浅 弘一

1 身長を測る

「集合」という言葉は日常でもよく使いますが，
数学で使う「集合」は，含まれるものがはっきりしている集まりを指します。
例えば，“1から10までの自然数の集まり”これは，1，2，3，・・・，9，10
と表すことができるので，10個の数字に限られます。
しかし，“大きな数の集まり”は？･･･はっきりと書き表すことができないので，「集合」ではありません。

例題

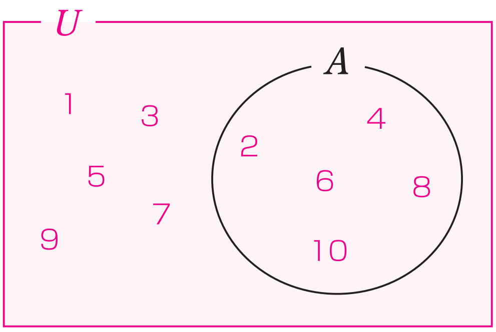
次の中で数学において集合と言えるものはどれですか？
① ある野球部で，背の高い部員の集まり
② ある高校で，自転車通学している生徒の集まり
③ 1から10までの整数で，約数が6個ある数の集まり

【解説】
① “背の高い”範囲がはっきりしないので，集合とは言えません。
②は範囲がはっきりしているので，集合と言えます。
③に書かれたような整数は存在しません。
しかし，これは「空集合」といって，要素を1つも含まない集合だと考えます。
このような記号「$\varnothing$」で表します。

2 集合の要素

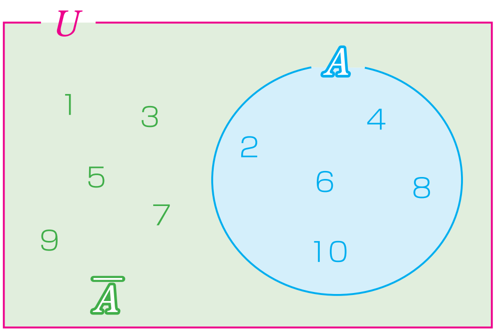
すべての要素を含む集合を「全体集合」といい，多くの場合「U」で表します。

例えば・・・



左図の場合，

全体集合 U が１から１０までの整数です。



集合 A は偶数の集まりです。

集合 A に含まれない要素の集まりを

「A の補集合」といい，記号「$\overline{A}$」で表します。

集合を構成している１つ１つのものを，その集合の「要素」といいます。

例えば，全体集合 U の要素は，１，２，３，４，５，６，７，８，９，１０　です。

このことを次のように表します。

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

１が要素であることは，記号「$\in$」を使って次のように表します。

$1 \in U$

やってみよう！

１０から２０までの３の倍数の集合を A とするとき，

集合 A の要素を書き並べて表しなさい。

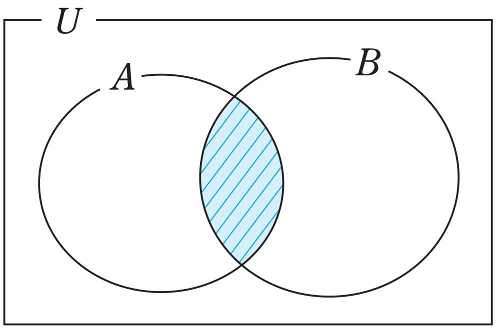
【答 え】

$A = \{12,\ 15,\ 18\}$

3 ベン図

以下のように集合を図式化したものをベン図といいます。

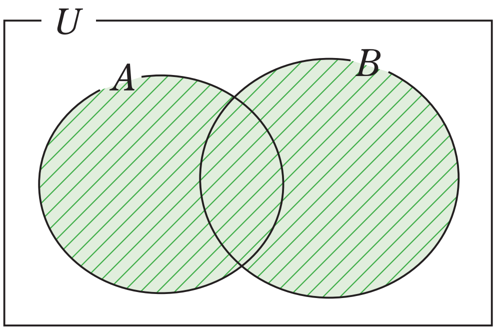
ベン図は，複数の集合の表現に対して効果を発揮します。



左図の斜線部分，

つまり A と B の共通部分を $A \cap B$ と表し，

「A かつ B」または「A キャップ B」と読みます 。



この斜線部分は，A と B の要素全体を表します。

これを A と B の和集合といいます。

$A \cup B$ と表し，

「A または B」または「A カップ B」と読みます。

やってみよう！

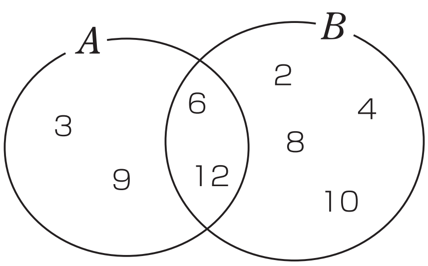
$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$

の共通部分の集合と和集合の要素をすべて書き並べなさい。

【答 え】

ベン図にしてみましょう。



A と B の共通部分には 6，12 があるので，

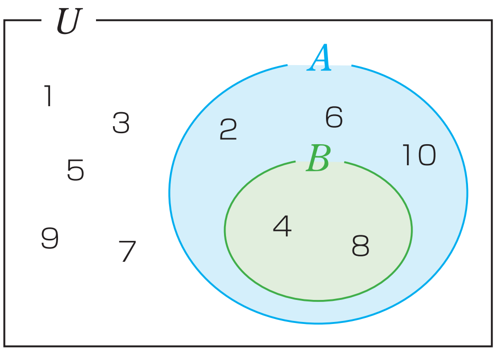
A と B の共通部分の集合の要素は　$A \cap B = \{6,\ 12\}$

A と B の和集合の要素は　$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

と表すことができます。

4 部分集合の表し方

下の図において,
全体集合 U は１から１０までの整数，集合 A はそのうちの偶数，集合 B はそのうちの４の倍数です。
このとき，集合 B は集合 A の部分集合です。記号「⊂」を使って「$B \subset A$」と表します。



このように,
ある集合が他のある集合の一部もしくは全部の要素だけでできていることを部分集合といいます。
ここで注意すべきことは，もととなる全体の集合も部分集合になるということです。
また，空集合も部分集合です。

やってみよう！

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とするとき,
その部分集合　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，　$B=\{3,\ 4,\ 5\}$ について
$\overline{A} \cap B$ を求めなさい。

【答 え】
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ に対して $\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$
これと $B=\{3,\ 4,\ 5\}$ の共通部分が $\overline{A} \cap B$ ですから
$\overline{A} \cap B=\{4\}$
となります。

5 カルノー図

ここでは最も簡単なカルノー図をあつかいます。

U	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	$A\cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\cap B$	$\overline{A}\cap \overline{B}$

A である，A でない（$\overline{A}$），B である，B でない（$\overline{B}$）の共通部分です。

例 題

ある映画を見た 100 人にアンケート調査を実施したところ，以下の結果を得た。

俳優　よかった＝ 58 人，　よくなかった＝ 42 人

物語　よかった＝ 30 人，　よくなかった＝ 70 人

俳優がよかったが物語がよくなかったと回答した生徒が 40 人であるとき，

俳優はよくなかったが物語はよかったと回答した人は何人か？

ただし，調査項目には 100 人の生徒が必ず答えたとする。

【解 説】

カルノー図を書いてみましょう。

俳優のみ良かったと回答した生徒が 40 人であることがポイントです。

項目	物語○	物語×	合計(人)
俳優○		40	58
俳優×			42
合計(人)	30	70	100

数値を実際に入れると左図のようになります。

項目	物語○	物語×	合計(人)
俳優○	58−40	40	58
俳優×	?	70−40	42
合計(人)	30	70	100

空所の数値を求めていきましょう。

項目	物語○	物語×	合計(人)
俳優○	18	40	58
俳優×	?	30	42
合計(人)	30	70	100

左図の「？」部分が求める数値ですから，

　行について　４２−３０＝１２

　または列について　３０−１８＝１２

いずれの計算でも 12 人であることがわかります。

やってみよう！

150 人の通学方法を調査したところ，電車を利用している人は 122 人，
バスを利用している人は 31 人いた。また，バスと電車の両方を利用している人が
12 人いた。このとき，バスと電車のどちらも利用していない人は何人か？

【答 え】

項目	バス 利用する	バス 利用しない	合計(人)
電車 利用する	12		122
電車 利用しない			
合計(人)	31		150

ここから空欄を求めましょう。

項目	バス 利用する	バス 利用しない	合計(人)
電車 利用する	12	110	122
電車 利用しない	19	9	28
合計(人)	31	119	150

バスと電車のどちらも利用していない人は 9 人と求まります。