第30回

立体図形への応用

講師
湯浅 弘一

1 立体図形に三角比を使う

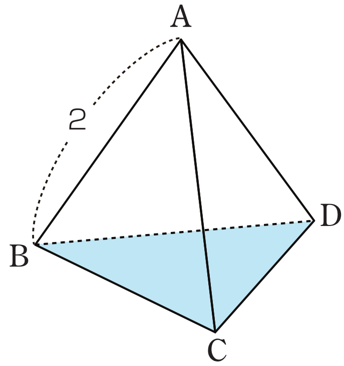
例題

1辺の長さが2である正四面体△ABCDにおいて、
次の問いに答えなさい。

（1）底面の△BCDの面積を求めなさい。

（2）頂点Aから△BCDに垂線AHを下ろしたとき，
AHの長さを求めなさい。

（3）正四面体ABCDにの体積を求めなさい。



【解 説】

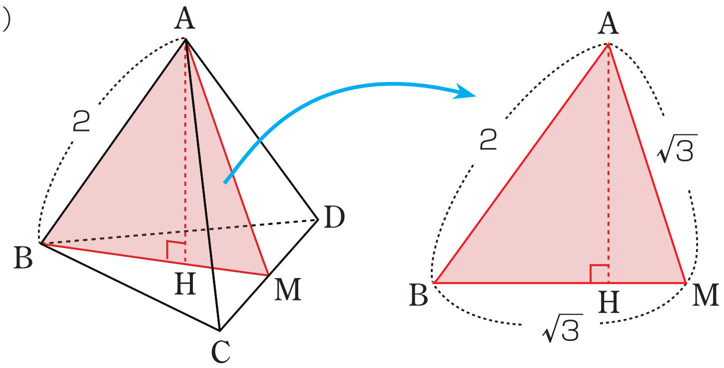
（1）正四面体ですから，どの面も正三角形です。

△BCDは1辺の長さが2の正三角形なので，三角形の面積の公式を用いて

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

と求まります。

（2）



余弦定理

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

を変形して

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

まず，正四面体を半分に切ります。

CDの中点をMとし，△ABMを考えましょう。

すべての辺の長さがわかっているので，余弦定理を使って$\cos B$を求めます。

$$\cos B = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{4 + 3 - 3}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

次に，$\cos B$ から $\sin B$ を求めます。

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

この公式を使って，

$$\sin^2 B + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 B = 1 - \frac{1}{3}$$

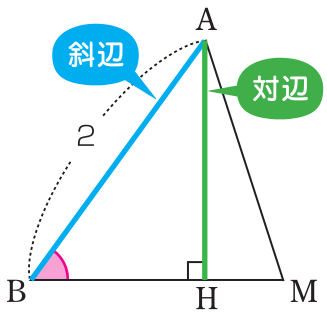
$$= \frac{2}{3}$$

$0^\circ < B < 90^\circ$ より

$$\sin B = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

となるので，

$$\frac{\mathrm{AH}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ より，} \quad \mathrm{AH} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



（3）三角錐の面積は，底面積 × 高さ × $\frac{1}{3}$ で求めることができます。

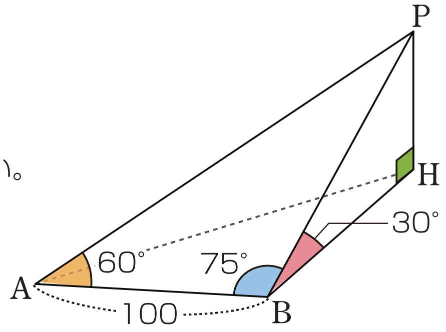
（1）より底面積は $\sqrt{3}$，（2）より高さは $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ですから，

$$\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3 \times \sqrt{2}}{3 \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2 立体図形に正弦・余弦定理を使う

例 題

三角錐 ABHP において，PH の長さを求めなさい。



【解 説】

PH $= x$ とおくと，三角比より，PB は $2x$ となります。

$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

正弦定理より，

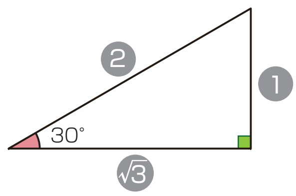
$$\frac{100}{\sin 45^\circ} = \frac{2x}{\sin 60^\circ}$$

この式を変形すると，

$$2x = \frac{100}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

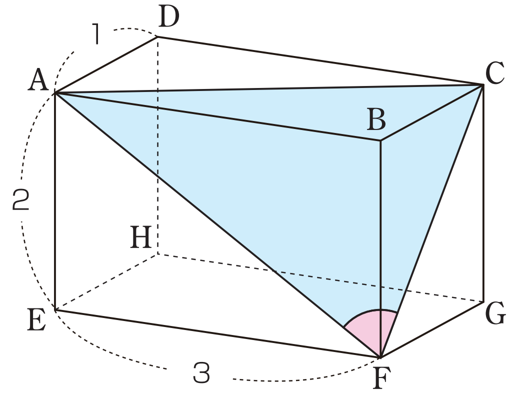
$$= 25\sqrt{6}$$



やってみよう！

図のような AB ＝ 3，AD ＝ 1，AE ＝ 2 である直方体 ABCD − EFGE がある。
次の問いに答えなさい。

（1）AF の長さを求めなさい。
（2）CF の長さを求めなさい。
（3）AC の長さを求めなさい。
（4）cos∠AFC を求めなさい。
（5）sin∠AFC を求めなさい。
（6）△AFC の面積を求めなさい。
（7）△AFC の外接円の半径 R を求めなさい。



【答 え】

（1）△AEF において，三平方の定理から
$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 3^2 + 2^2 = 13$　より　$AF = \sqrt{13}$

（2）△BCF において，三平方の定理から
$CF^2 = BF^2 + BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$　より　$CF = \sqrt{5}$

（3）△ABC において，三平方の定理から
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$　より　$CF = \sqrt{10}$

（4）△AFC において，余弦定理から
$AC^2 = AF^2 + CF^2 - 2 \times AF \times CF \times \cos\angle AFC$　より
$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{13} \times \sqrt{5} \times \cos\angle AFC$
を計算して
$$\cos\angle AFC = \frac{13 + 5 - 10}{2 \times \sqrt{13} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

（5）$\sin^2\angle AFC + \cos^2\angle AFC = 1$　と（4）を用いて
$$\sin^2\angle AFC = 1 - \cos^2\angle AFC = 1 - \left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2 = 1 - \frac{16}{65} = \frac{49}{65}$$
よって，$\sin\angle AFC = \sqrt{\dfrac{49}{65}} = \dfrac{7}{\sqrt{65}} = \dfrac{7\sqrt{65}}{65}$

（6）$\triangle AFC = \dfrac{1}{2} \times AF \times CF \times \sin\angle AFC = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{5} \times \dfrac{7}{\sqrt{65}} = \dfrac{7}{2}$

（7）△AFC において，正弦定理から　$\dfrac{AC}{\sin\angle AFC} = 2R$　に代入して
$$R = \frac{AC}{2\sin\angle AFC} = \frac{\sqrt{10}}{2 \times \dfrac{7}{\sqrt{65}}} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{65}}{14} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$