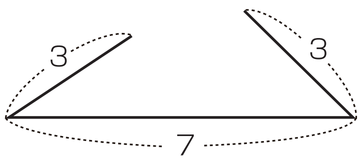
第29回

三角形の形状

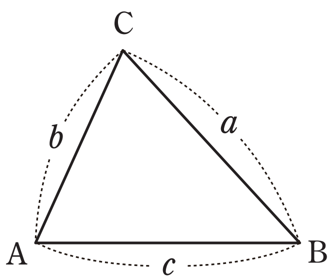
講師
湯浅 弘一

1 三角形の成立条件

頭の中で，３辺の長さが３，４，５の三角形を思い浮かべてください。
そう，直角三角形が浮かぶと思います。
今度は…３辺の長さが３，３，７の三角形を思い浮かべてください。
どんな三角形ですか？二等辺三角形…ではありません。
この三角形は存在しないのです。



長さ３の２つの辺どうしがくっつかない・・・
では，どんな三角形が成り立つのでしょうか？



$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$$

“２辺の長さの和は他の１辺の長さより大きい”
これを「**三角形の成立条件**」といいます 。

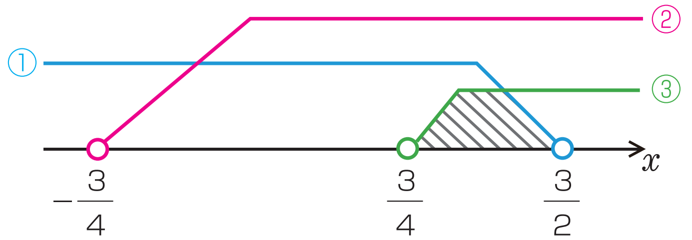
例 題

3辺の長さが x, $x+3$, $4x$ である三角形について x のとりうる値の範囲を求めなさい。

【解 説】

三角形の成立条件より
$$\begin{cases} x+(x+3)>4x & \cdots ① \\ (x+3)+4x>x & \cdots ② \\ 4x+x>x+3 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $x<\dfrac{3}{2}$, ②より $x>-\dfrac{3}{4}$, ③より $x>\dfrac{3}{4}$ となるので,



よって, $\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{3}{2}$

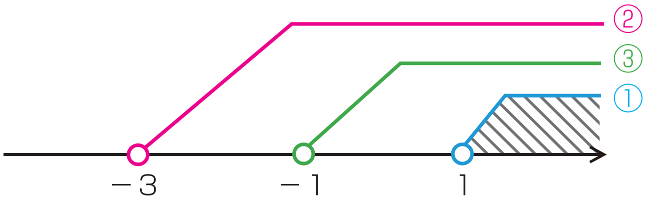
やってみよう！

3辺の長さが x, $x+1$, $x+2$ である三角形について x のとりうる値の範囲を求めなさい。

【答 え】

三角形の成立条件より
$$\begin{cases} x+(x+1)>x+2 & \cdots ① \\ (x+1)+(x+2)>x & \cdots ② \\ (x+2)+x>x+1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $x>1$, ②より $x>-3$, ③より $x>-1$ となるので,



①②③のすべてを満たすのは, $x>1$

2 正弦定理から三角形の形状を知る

例題

△ABC において，$a\sin A = b\sin B$ が成り立つとき，△ABC はどんな三角形か答えなさい。

【解説】

三角形の形状を知るには，辺に関する情報を知るか，角に関する情報を知るかのどちらかです。

数学Ⅰの多くは辺に関する情報で解決できます。この場合，正弦定理を使いましょう。

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$（$R$ は外接円の半径）

この式を変形すると，

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

これを問題文の $a\sin A = b\sin B$ に代入すると

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R}$$

両辺を $2R$ 倍すると，$a^2 = b^2$

辺の長さは正なので，$a = b$ つまり CA ＝ CB の二等辺三角形とわかります。

やってみよう！

△ABC において，$a\sin A = b\sin B + c\sin C$ が成り立つとき，

△ABC はどんな三角形か答えなさい。

【答え】

正弦定理を用いて

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$ を

$a\sin A = b\sin B + c\sin C$ に代入して

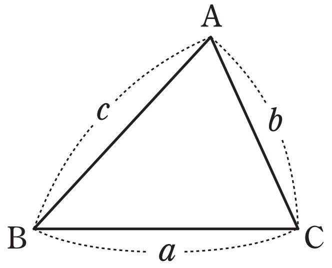
$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} + c \times \frac{c}{2R}$$

両辺を $2R$ 倍すると，$a^2 = b^2 + c^2$ になるので，

△ABC は，∠A ＝ 90°の直角三角形

3 余弦定理から三角形の形状を知る

余弦定理



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

この３つの式を変形すると，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

と表すことができます。

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

この式で考えてみましょう。

$2bc$ は正の値なので，

$b^2+c^2-a^2$ が正のときは $\cos A$ も正，つまり A は鋭角

$b^2+c^2-a^2$ が０のときは $\cos A$ も０，つまり A は直角

$b^2+c^2-a^2$ が負のときは $\cos A$ も負，つまり A は鈍角

となります。

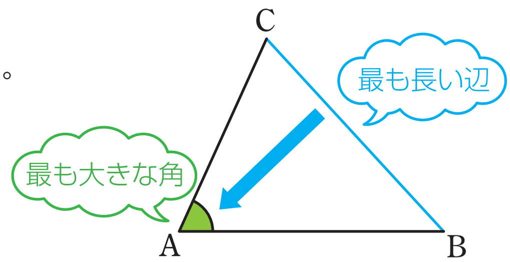
三角形では，

３辺のうち最も長い辺に対応する角が最も大きな角です。

なので，

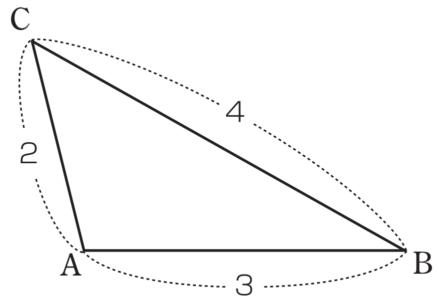
直角の対辺の長さや鈍角の対辺の長さが，

その三角形の最大辺になります。



例題

図のような△ABC において，$\cos A$ を求めて
∠A がどんな角かを答えなさい。



【解 説】

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

この式に $a=4$，$b=2$，$c=3$ を代入して $\cos A$ を求めましょう。

$$\cos A=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=\frac{4+9-16}{12}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

負の値になったので，∠A は鈍角です。

やってみよう！

△ABC において３辺の長さが次のようになるとき，
△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか。

（1）$a=17$，$b=15$，$c=8$
（2）$a=5$，$b=7$，$c=4$
（3）$a=2$，$b=3$，$c=6$

【答 え】

（1）$a=17$ が最大辺であるから∠A に関する式 $b^2+c^2-a^2$ の符号を調べると

$$b^2+c^2-a^2=15^2+8^2-17^2=0$$

よって，直角三角形です。

（2）$b=7$ が最大辺であるから∠B に関する式 $c^2+a^2-b^2$ の符号を調べると

$$c^2+a^2-b^2=4^2+5^2-7^2=16+25-49=-8<0$$

よって，鈍角三角形です。

（3）$c=6$ が最大辺であるから∠C に関する式 $a^2+b^2-c^2$ の符号を調べたくなりますが，
三角形の成立条件から
（2辺の長さの和）＞（他の１辺の長さ）
にならないので，この三角形は存在しません。

やってみよう！

△ABC において，$a\cos B = b\cos A$ が成り立つとき，△ABC はどんな形ですか？

【答 え】

余弦定理から導いた三角形の角の余弦を表す式を用いて，辺の長さの情報を調べます。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cdots ①$$

$$\cos B = \frac{c + a^2 - b^2}{2ca} \quad \cdots ②$$

$a\cos B = b\cos A$ に①②を代入して

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

左辺は a を約分，右辺は b を約分して

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

両辺を $2c$ 倍すると

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

左辺に移項して

$$2a^2 - 2b^2 = 0$$

つまり　$2(a^2 - b^2) = 0$ より

$$2(a + b)(a - b) = 0$$

$a + b > 0$ であるから $a - b = 0$

よって $a = b$ より CA ＝ CB の二等辺三角形