第 28 回

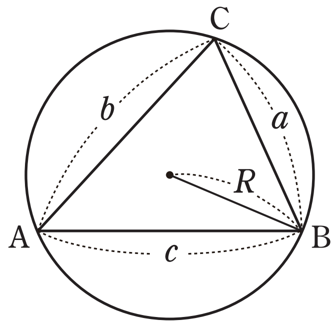
三角比と図形の計量

講師
湯浅 弘一

1 正弦定理や余弦定理を実際に使う

正弦定理を思い出しましょう。

正弦定理

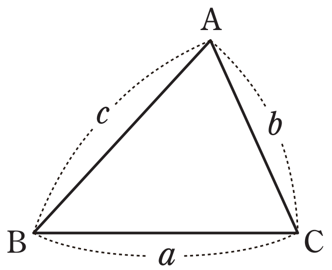


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（R は△ABC の外接円の半径）

次に余弦定理を思い出しましょう。

余弦定理



$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

例 題

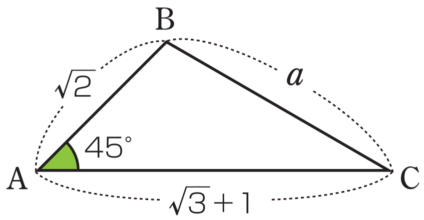
△ABC において，∠A = 45°，$b=\sqrt{3}+1$，$c=\sqrt{2}$ のとき，a を求めなさい。

【解 説】

２辺の長さと他の１つの角の大きさがわかっているので，余弦定理を使います。

余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ より，

$$a^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ$$
$$=3+2\sqrt{3}+1+2-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=6+2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)$$
$$=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$$
$$=4$$

$a>0$ より，$a=2$

例 題

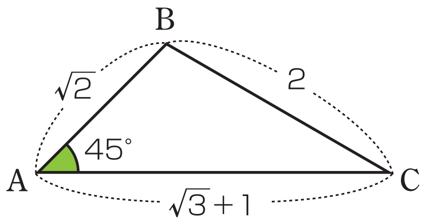
$\triangle$ ABC において，$\angle$A $= 45°$，$a = 2$，$b = \sqrt{3} + 1$，$c = \sqrt{2}$　のとき，
$\angle$C の大きさを求めなさい。

【解 説】

先ほどの問題で a の値が2と求まりました。今度は，角 C の大きさを求めます 。
どの定理を使えるでしょうか？角 A の大きさと対応する辺 a の値がわかっています。
そんなときは，正弦定理が使えます。

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$　より，$\dfrac{2}{\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$

$$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\angle$A $= 45°$ なので，$0° < \angle$C $< 135°$　よって，$\angle$C $= 30°$

やってみよう！

$\triangle$ABC において，$b = 3\sqrt{3}$，$c = 3$，$\angle$B $= 120°$　であるとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めなさい。

【答 え】

2辺の長さと他の1角の大きさがわかっているので，$\triangle$ABC に余弦定理を使います。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$　に代入すると

$(3\sqrt{3})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \cos 120°$

$$27 = 9 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

この式を整理すると，$a^2 + 3a - 18 = 0$

因数分解して，$(a + 6)(a - 3) = 0$

$a > 0$ より，$a = 3$

よって，$a = c = 3$　となり，BA ＝ BC の二等辺三角形となるので，

$\angle$B $= 120°$ より，$\angle$A $= \angle$C $= (180° - 120°) \times \dfrac{1}{2} = 30°$

したがって，求める残りの辺の長さは $a = 3$，角の大きさは $\angle$A $= \angle$C $= 30°$

2 三角比の表を使う

三角比の表

３０°，４５°，６０° などの三角比はよく知られていますが，
それ以外の角度も含めて三角比をまとめたものがこちらです。

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	——

例えば，

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$$

$\sqrt{3}$ = 1.7320508・・・(無理数）を２で割り，小数第４位までの近似値で表されたものです。
また

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$$ ですが，分母が０になってしまうので，この値は存在しません。

したがって，表でも「――――」と書かれています。

やってみよう！

三角比の表を用いて $\sin 15^\circ$ を求めなさい。

【答 え】

表から $\sin 15^\circ$ は

角	正弦（sin）	余弦（cos）	正接（tan）
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	$\boxed{0.2588}$	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867

$\sin 15^\circ = 0.2588$　です。

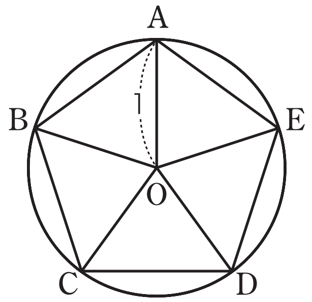
3 三角比の表を使う

例 題

半径１の円に内接する正５角形の面積を三角比の表を用いて求めなさい。

【解 説】

△OAB ≡△OBC ≡△OCD ≡△ODE ≡△OEA であり，
これらは頂点がすべて
360°÷５＝72°
の二等辺三角形です。
この二等辺三角形は，72°の角を挟む２辺の長さが１なので，
三角形の面積の公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ に代入します。



ここで三角比の表を使いましょう。

角	正弦（sin）	余弦（cos）	正接（tan）
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874

sin72°＝0.9511 ですから，

$$\triangle\mathrm{OAB}\times 5=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 72^\circ\times 5=\frac{1}{2}\times 0.9511\times 5=2.37775$$

と求まります。

やってみよう！

半径１の円に内接する正 360 角形の面積を三角比の表を用いて求めなさい。

【答 え】

先ほどの例題と同じように考えると,

頂角が

$360^\circ \div 360 = 1^\circ$

の二等辺三角形が３６０個できます。

したがって、求める面積は

角	正弦（sin）	余弦（cos）	正接（tan）
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	$\boxed{0.0175}$	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 1^\circ \times 360 = \frac{1}{2} \times 0.0175 \times 360 = 3.15$$

この値，半径１の円の面積 π に近いですね！