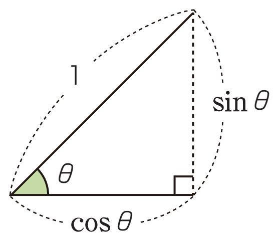
第27回

余弦定理

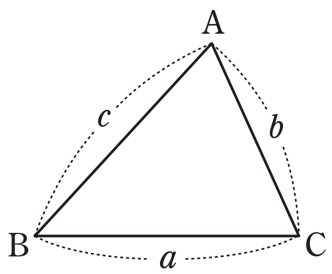
講師
湯浅 弘一

1 余弦定理とは

余弦とは cos のこと。
この回では，この $\cos\theta$ を用いた定理を学びます。



余弦定理



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

３つもありますが･･･まずは１つの式をていねいに見てみましょう！

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

について，

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

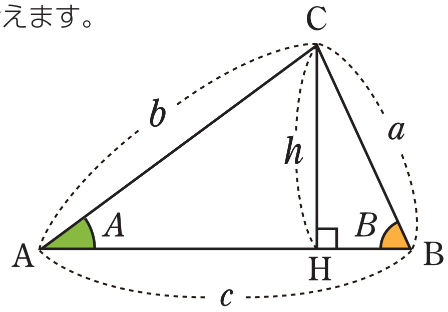
青文字の部分は三平方の定理です。
つまり，余弦定理は簡単に言えば，
（三平方の定理）から（２辺の長さと挟む角の大きさの積）を引き算している定理です。

☆★☆ 余弦定理の証明 ☆★☆

次の等式を証明します。

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ・・・①

まず，△ABC において，A，B がともに鋭角の場合を考えます。



頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろすと

三平方の定理により

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$ ・・・②

また　$\mathrm{BC} = a$

$\mathrm{CH} = b\sin A$

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$

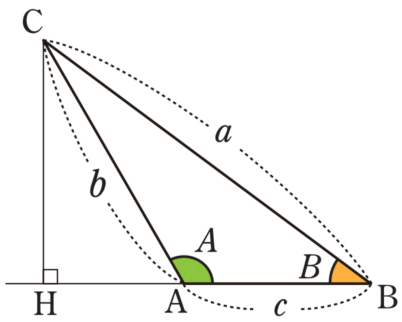
これらを②に代入して

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

△ABC において，A または B が鈍角の場合は，

下の図のように，頂点 C から辺 AB の延長に垂線 CH を下ろすと，やはり②が成り立ちます。

また，それぞれの場合において，CH，BH が次のようになり，

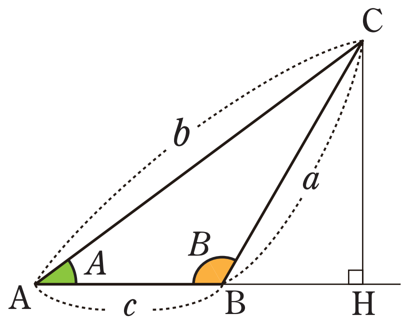


$\mathrm{CH} = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A$

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} + \mathrm{AH}$

$= c + b\cos(180^\circ - A)$

$= c - b\cos A$



$\mathrm{CH} = b\sin A$

$\mathrm{BH} = \mathrm{AH} - \mathrm{AB}$

$= b\sin A - c$

これらを②に代入すると①が得られます。

A または B が直角のときも，①は成り立ちます。

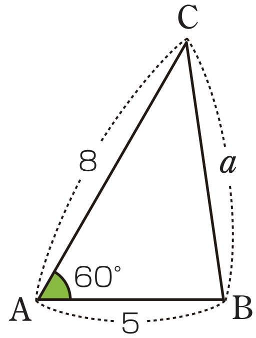
同様に，次の２つの等式も成り立ちます。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ ，　$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

実際に使ってみましょう。

例 題

△ABC において，$b=8$，$c=5$，∠A = 60°
のとき，a を求めなさい。



【解 説】

余弦定理の式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ にあてはめます。

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A\\
&= 8^2+5^2-2\times 8\times 5\times \cos 60^\circ\\
&= 64+25-2\times 8\times 5\times \frac{1}{2}\\
&= 89-40\\
&= 49
\end{aligned}
$$

$a>0$ より $a=7$

やってみよう！

△ABC において，AB = 5，AC = 8，∠A = 60° のとき，
BC の長さを求めなさい。

【答 え】

△ABC において，余弦定理から

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A\\
&= 8^2+5^2-2\times 8\times 5\times \cos 60^\circ\\
&= 49
\end{aligned}
$$

$a>0$ より BC $=a=7$ と求まります。

2 余弦定理の使い方

余弦定理は以下のようなときに使うことができます。

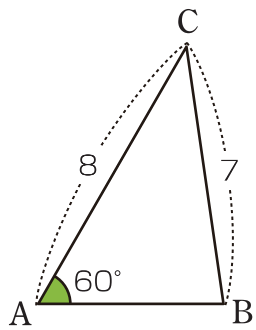
① 与えられた三角形の３辺の長さがわかるとき

② 与えられた三角形の２辺の長さとひとつの角の大きさがわかるとき

③ $\cos A$ などを三角形の辺の長さで表したいとき。

例 題

△ABC において，AB の長さを求めなさい。
ただし，$a=7$，$b=8$，$\angle A=60^\circ$
とする。



【解 説】

先ほどの問題と似ていますが，

大きさが分かっている角が，長さが分かっている２辺にはさまれていませんね。

まず，余弦定理に代入して計算してみましょう。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$7^2=8^2+c^2-2\times8\times c\times\cos60^\circ$$

$$49=64+c^2-2\times8\times c\times\frac{1}{2}$$

$$c^2-8c+15=0$$

２次方程式の形になりました。これを解くと，

$$(c-5)(c-3)=0$$

よって，AB $=c=5$，３ となります。

答えが２つになりました。これはどういうことかというと・・・

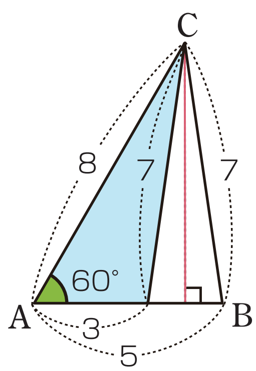
右図の外側の三角形と，水色の部分の三角形の

２種類の三角形が考えられるということです。

ちなみに，

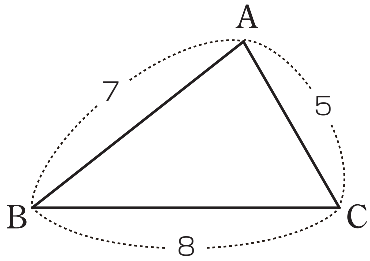
２次方程式の解の１つが負の数になったときは，

正の数だけが答えになります！



やってみよう！

右図の△ABCにおいて∠Cの大きさを求めなさい。
ただし，AB = 7，BC = 8，CA = 5 とする。



【答え】
∠Cの大きさを求めたいので，余弦定理の $\cos C$ を含む

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

の式を使います。

BC = a，CA = b，AB = c なので

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos C$$

この式を整理すると，

$$80\cos C = 8^2 + 5^2 - 7^2$$

$$\cos C = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

よって，∠C = 60°

【参考】この三角比の表は，頭に入れておきましょう！

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

やってみよう！

△ABC において $AB=\sqrt{2}$，$BC=3$，$CA=\sqrt{5}$ とするとき，
∠B の大きさを求めなさい。

【答 え】
∠B の大きさを求めたいので，余弦定理の $\cos B$ を含む

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

の式を使います。

$$(\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\times\cos B$$

この式を整理すると，

$$6\sqrt{2}\cos B=(\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2$$

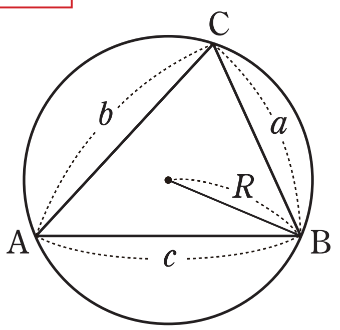
$$\cos B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\angle B=45^\circ$

3 正弦定理，余弦定理の使い分け

前回学習した正弦定理を思い出しましょう。

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（R は△ABC の外接円の半径）

正弦定理は，以下のようなときに使うことができます。

① 与えられた三角形の対角と対辺の関係がわかるとき
② 三角形の外接円の半径を求めたいとき
③ 三角形の辺の長さの比やサインの比を求めたいとき

正弦定理と余弦定理，それぞれの特徴を理解して使い分けましょう！

やってみよう！

$\triangle$ABC において $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ が成り立つとき，
∠A の大きさを求めなさい。

【答え】

正弦定理から $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 7 : 5 : 3$

３辺の長さの比が $7 : 5 : 3$ なので

３辺の長さを $a = 7k$ ， $b = 5k$ ， $c = 3k$ とおく。$(k > 0)$

∠A の大きさを求めたいので，余弦定理の

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

に代入して

$$(7k)^2 = (5k)^2 + (3k)^2 - 2 \times 5k \times 3k \times \cos A$$

この式を整理すると，

$$30k^2\cos A = -15k^2$$

両辺を $15k^2$ で割って，

$$2\cos A = -1$$

よって，$\cos A = -\dfrac{1}{2}$ となるので，∠A $= 120^\circ$