第26回

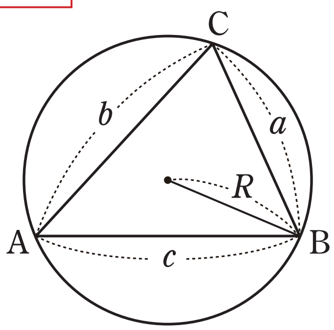
正弦定理

講師
湯浅 弘一

1 正弦定理

正弦とは sin のこと。
この回では，この $\sin\theta$ を用いた定理を学びます。

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（R は△ABC の外接円の半径）

☆★☆ ここで注意 ☆★☆
△ABC の∠A の対辺の長さを BC ＝ a と表し，∠B の対辺の長さを CA ＝ b と表し，
∠C の対辺の長さを AB ＝ c と表します。

この定理の特徴を見ていきましょう。

特徴１
分母は∠A に関する sin の値，分子は∠A の対辺の長さを表しています。
つまり，対角と対辺の関係式になっています。それが∠A，∠B，∠C の順に書かれています。

特徴２
三角形の外接円の半径 R を求めることができます。ちなみに $2R$ は外接円の直径です。

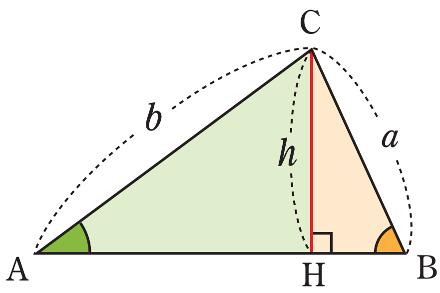
特徴３
分数が３つ並んでいます。分数は分子の比と分母の比を並べると等しくなります。

このような特徴から，正弦定理を使うのは主に，以下のようなときです。
① 与えられた三角形の対角と対辺の関係がわかるとき
② 三角形の外接円の半径を求めたいとき
③ 三角形の辺の長さの比やサインの比を求めたいとき

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

2 正弦定理の証明

正弦定理が成り立つことを証明します。
まず，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH をおろし，
これを h と表します。



△AHC において

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

$$h = b\sin A$$

同じように，△BCH においても，

$$h = a\sin B$$

となるので，

$$b\sin A = a\sin B$$

$$\frac{b\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A}\cdot\sin B} = \frac{a\cancel{\sin B}}{\sin A\cdot\cancel{\sin B}}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

同様にして頂点 B から対辺 AC に垂線をおろして考えると、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

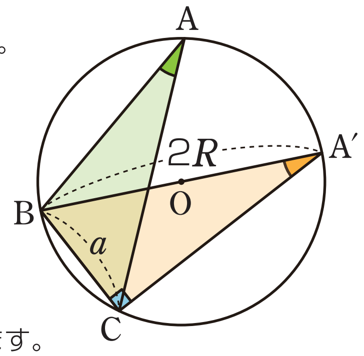
となることがわかります。
よって，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

が導かれました。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

続いて，外接円の半径 R との関係を見ていきましょう。
頂点 A を BA がこの円の直径になるように動かした点を A′ とします。
すると円周角の定理により，直径に対する円周角 C は 90°。
つまり，△A′BC は直角三角形になります。
△A′BC に注目すると，



$$\sin A' = \frac{a}{2R}$$

∠A と∠A′ は，同じ弧に対する円周角なので，大きさが等しくなります。
よって

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$$

となるので

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

∠B，∠C についても同様に考えると

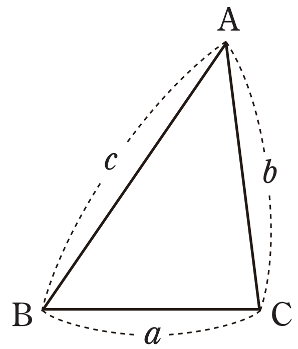
$$\frac{b}{\sin B} = 2R \ , \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

となります。

よって正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$　が証明されました。

例 題

右図の三角形 ABC において，
$\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$
のとき，3辺の長さ $a : b : c$ を求めなさい。



【解 説】
$\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$　より，正弦定理を用いると

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = 4 : 5 : 6$$　（R は△ABC の外接円の半径）

つまり，
$a : b : c = 4 : 5 : 6$
と求まります。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

やってみよう！

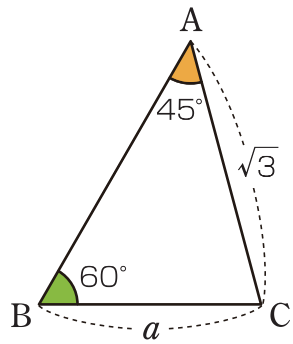
△ABC において $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ であるとき，
３辺の長さの比 BC：CA：AB を求めなさい。

【答 え】
正弦定理を用いると，
$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$
と求まります。

3 正弦定理の使い方

例 題

右図の三角形において，a の値を求めなさい。



【解 説】
△ABC の∠B の対辺の長さが $\sqrt{3}$ のとき，∠A の対辺の長さ a を求めたいので，
正弦定理が使えそうです。
そこで・・・
△ABC において正弦定理から

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

が成り立ちます。
両辺に $\sin 45^\circ$ をかけて

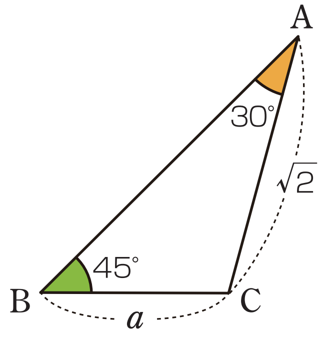
$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

と求まります。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

やってみよう！

右図の三角形において，a の値を求めなさい。



【答え】

△ABC において正弦定理から

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

が成り立ちます。

両辺に $\sin 30^\circ$ をかけて

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

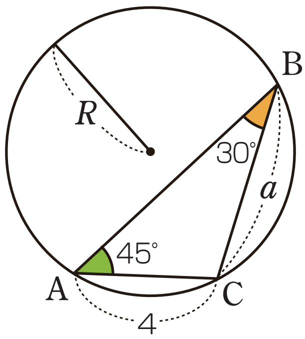
と求まります。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

4　三角形の外接円の半径を求める

例 題

右図の三角形 ABC において，辺の長さ a と外接円の半径 R を求めなさい。



【解 説】

正弦定理から

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \cdots ①$$

①の中辺の $\dfrac{4}{\sin 30^\circ} = \dfrac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{4 \times 2}{\left(\frac{1}{2}\right) \times 2} = 8$　（分母と分子に2を倍分）

ですから，①の式は

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = 8 = 2R$$

まず，$\dfrac{a}{\sin 45^\circ} = 8$　を解くと，$a = 8\sin 45^\circ = 8 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

次に，$8 = 2R$　より，$R = 4$

と求まります。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

やってみよう！

△ABC において $a=\sqrt{2}$，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$ のとき，b と外接円の半径 R を求めなさい。

【答 え】

正弦定理から

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=2R \quad \cdots ①$$

①の左辺の $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$

ですから，①の式は

$$2=\frac{b}{\sin 60^\circ}=2R$$

次に，$2=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$ から，$b=2\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

また，$2=2R$ から，$R=1$ と求まります。

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。