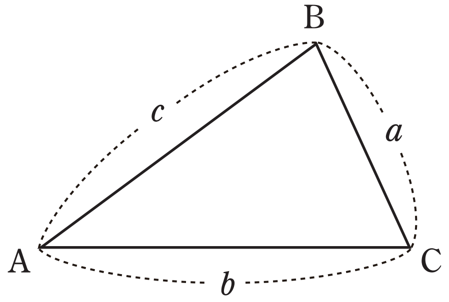
第25回

三角形の面積

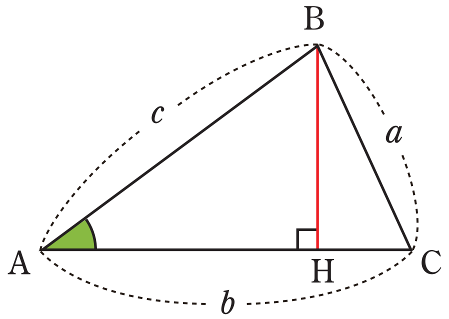
講師
湯浅 弘一

1 三角形の面積の公式

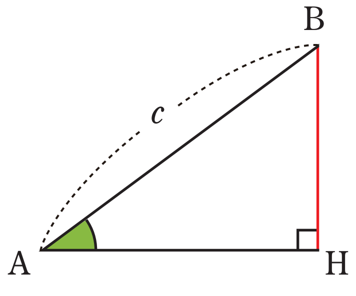
次の三角形を考えます。



角 B から対辺 AC への垂線 BH を下ろします。



ここで左側の直角三角形を考えます。



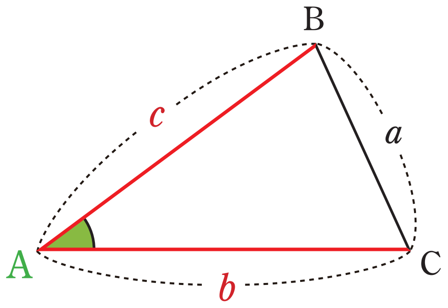
$\mathrm{BH}=c\sin A$ と表すことができます。

つまり，これが△ABC と△AHB の高さになります。

したがって，△ABC の面積を S とすれば，

$$S=\mathrm{AC}\times\mathrm{BH}\times\frac{1}{2}\quad \text{ですから}\quad S=b\times c\sin A\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

と求まります。これが三角比を用いる三角形の面積の公式です。



$S = \frac{1}{2} bc \sin A$

です。

この公式はその他にも

$S = \frac{1}{2} ca \sin B$

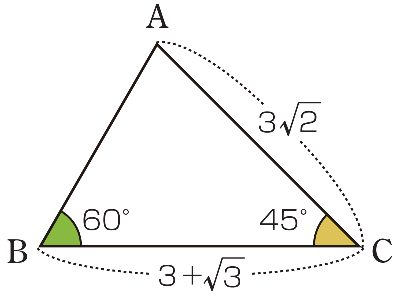
$S = \frac{1}{2} ab \sin C$

もあります。

「2分の1×辺×辺×はさむ角のサイン」と覚えましょう！

例 題

右図の三角形の面積を求めなさい。



【解 説】

面積 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ を用いて，

$S = \frac{1}{2} \times (3 + \sqrt{3}) \times 3\sqrt{2} \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times (3 + \sqrt{3}) \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$

よって，面積は，$\frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$ と求まります。

やってみよう！

△ABC で $c = 6$，$a = 4$，$B = 45^\circ$ のときの△ABC の面積を求めなさい。

【答 え】

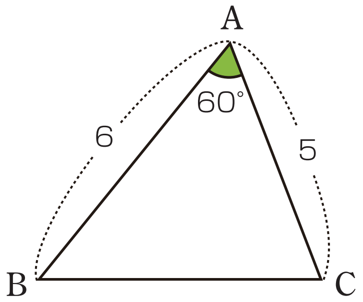
△ABC の面積を S とする。

$S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

2 三角形の面積の利用

例題

右図の三角形において，∠ A の二等分線と
辺 BC との交点を D とするとき，
線分 AD の長さを求めなさい。

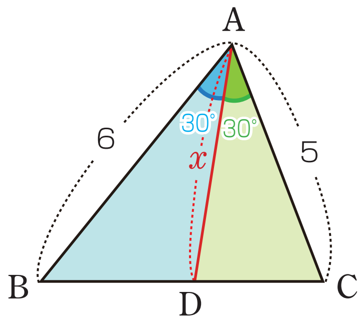


【解 説】

三角比を用いた三角形の面積の公式を使います。

AD ＝ x とおくと

面積について △ABD ＋△ADC ＝△ABC ですから



$$\frac{1}{2}\times AB\times AD\times \sin30^\circ+\frac{1}{2}\times AD\times AC\times \sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin60^\circ$$

よって

$$\frac{1}{2}\times 6\times x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times x\times 5\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

この方程式を解いて（両辺を 4 倍して）

$$6x+5x=30\sqrt{3}$$

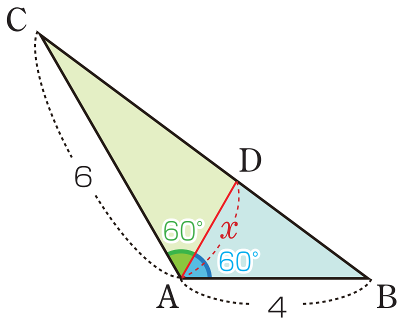
$$x=\frac{30\sqrt{3}}{11}$$

よって，線分 AD の長さは $\frac{30\sqrt{3}}{11}$

練習問題

三角形 ABC において，$AB = 4$，$AC = 6$，$\angle BAC = 120^\circ$ とし，$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

【答 え】



$AD = x$ とおくと

面積について $\triangle ABD + \triangle ADC = \triangle ABC$

よって

$$\frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times AD \times AC \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 120^\circ$$

ここで $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，両辺を $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ で割って整理すると

$AB \times AD + AD \times AC = AB \times AC$

$4 \times x + x \times 6 = 4 \times 6$

この方程式を解いて

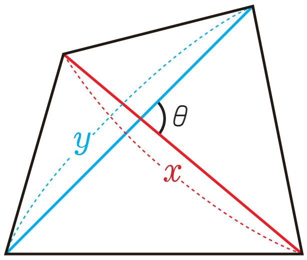
$4x + 6x = 24$ から $x = \dfrac{12}{5}$

やってみよう！

右図の四角形の対角線の長さは x, y です。
２本の対角線のなす角が θ であるとき,
この四角形の面積 S は

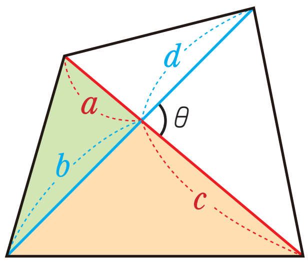
$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

であることを示しなさい。



【答 え】

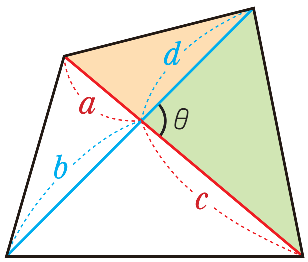
右図のように，それぞれの線分の長さを a, b, c, d と定めると
$x=a+c$, $y=b+d$
と書けます。



左側の三角形の面積は　$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

下側の三角形の面積は　$\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$

同様に



右側の三角形の面積は　$\frac{1}{2}cd\sin\theta$

上側の三角形の面積は　$\frac{1}{2}ad\sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}ad\sin\theta$

この４つの三角形の面積を足すと求めたい四角形の面積になるので，合計すると

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}bc\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\theta+\frac{1}{2}ad\sin\theta$$

$\frac{1}{2}\sin\theta$ でくくる

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\,(ab+bc+cd+ad)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+ad)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)(c+d)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

と示すことができる。

おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
第 29 回 三角比の導入　三角定規の性質

CLICK!