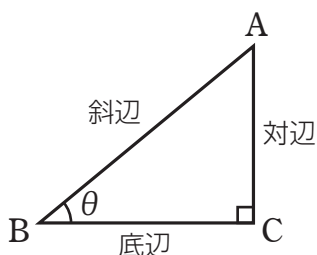


三角比の相互関係

講師
湯浅 弘一

1 三角比の定義のおさらい



$$\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$$

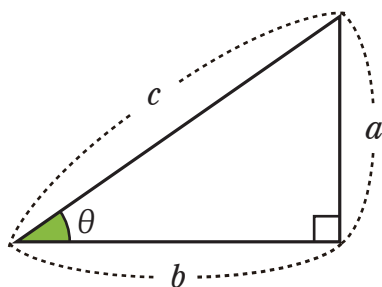
2 タンジェントをサインとコサインで表す

三角比には、このような関係が成り立ちます。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

つまり、 $\sin \theta \div \cos \theta$ のことです！

この式を導きます。



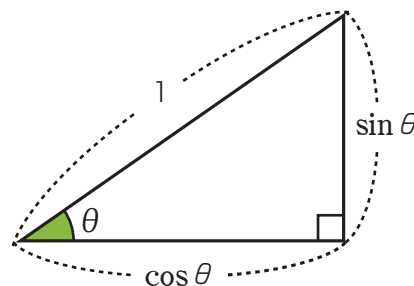
右図の直角三角形の $\sin \theta$ は $\frac{a}{c}$ 、 $\cos \theta$ は $\frac{b}{c}$ です。

ここで c を 1 とすると、 $\sin \theta$ は a 、 $\cos \theta$ は b になります。

$$\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} \text{ なので、 } \frac{a}{b} \text{。}$$

つまり、 $\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ になることがわかります。

タンジェントはサインとコサインで表すことができるということですね！



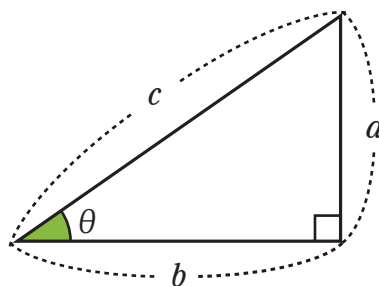
3 サインとコサインの関係

まず、三平方の定理をおさらいしましょう。

右図の三角形 ABC において、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立ちます。

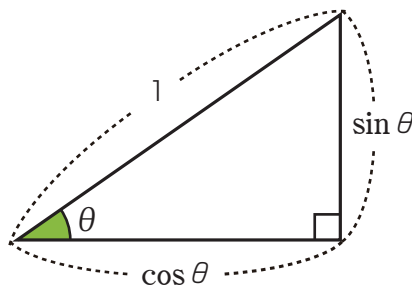


さきほどの図を思い出してください。

右図のような直角三角形で三平方の定理から

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が成り立ちます。



ここで、2乗の書き方に注意が必要です！

$$\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$$

$$\sin \theta^2 = \sin(\theta)^2$$

「2」を書く位置によって意味がちがってしまうので、気をつけましょう。

例題

θ が鋭角であるとき、 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のとき、

$\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

【解説】

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使います。


$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ を代入して, } (\sin \theta)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{これは } (\sin \theta)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\text{よって, } \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ (}\theta \text{ は鋭角なので)}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right) \times 5}{\left(\frac{3}{5}\right) \times 5} \quad \leftarrow \text{分母に5を倍分}$$

$$\text{よって, } \tan \theta = \frac{4}{3}$$

やってみよう! 

$\sin \theta = \frac{1}{3}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

【答え】

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使います。

$\sin \theta = \frac{1}{3}$ を代入して,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

これは $(\cos \theta)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

よって, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (θ は鋭角なので)

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \times 3}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times 3} \quad \leftarrow \text{分母に 3 を倍分}$$

よって, $\tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4 三角比の相互関係を使う

ここまでをまとめると三角比の相互関係とは,

(1) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

この2つでした。

これを実際に問題で使ってみましょう。

やってみよう!

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \text{ を示しなさい。}$$

【答え】

等式の証明と言います。

考え方は左辺の式から右辺の式を導く、または右辺の式から左辺の式を導くを行います。

ここでは左辺の式から右辺の式を導くことにします。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \longleftarrow \end{array} \right) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ から, } \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \sin \theta}{\cos \theta \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \longleftarrow \text{分母を } \sin \theta \cos \theta \text{ に通分} \\ &= \frac{(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \longleftarrow (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

となります。

5 $90^\circ - \theta$ の三角比

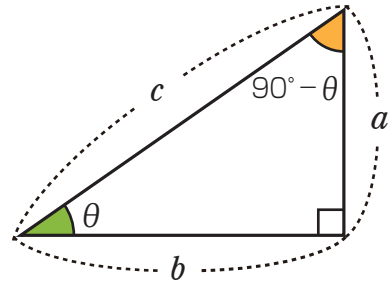
三角比には、このような関係もあります。

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

この式を導きます。

右図の三角形の内角の和は 180° で、角 C は 90° なので、
角 B は、 $90^\circ - \theta$ になります。



$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

三角形をひっくり返して向きを変えてみましょう。

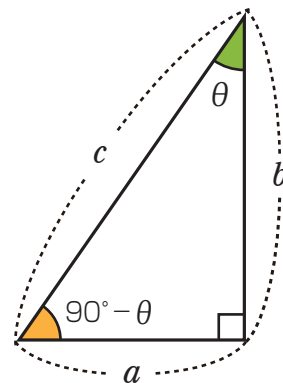
$$\cos \theta = \frac{a}{c}$$

$\sin \theta$ も $\cos(90^\circ - \theta)$ も、同じ $\frac{a}{c}$ なので、

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ となります。

同様に、 $\sin(90^\circ - \theta)$ と $\cos \theta$ は、同じ $\frac{b}{c}$ なので、

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ も成り立ちます。



このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。