第20回

2次不等式の応用

講師
湯浅 弘一

1 2次不等式とグラフ

例題

次の２次不等式を解きなさい。

$x^2 - 4 > 0$

【解 説】

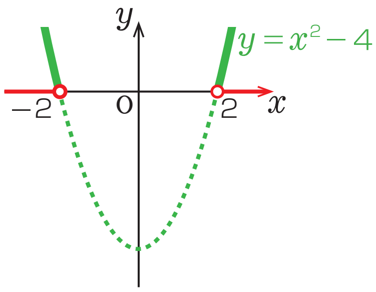
２次不等式は，グラフを使って解くことができます。

左辺に y ＝をつけて，２次関数 $y = x^2 - 4$ のグラフをかき，x 軸（$y = 0$）との位置関係を見ていきます。

グラフが $y = 0$ つまり x 軸より上にある x の値の範囲は，

$x < -2$，　$2 < x$

と求まります。



例 題

次の2次不等式を解きなさい。

（1）　$x^2 - 4 < 0$

（2）　$x^2 - 2x + 1 \leqq 0$

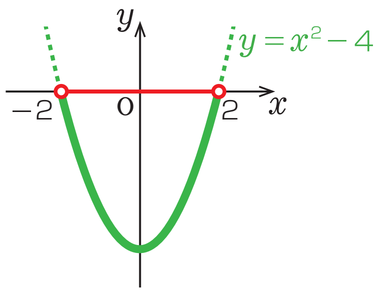
（3）　$x^2 - 2x + 3 > 0$

【解 説】

（1）$y = x^2 - 4$　のグラフが0より小さい範囲を求めるので

$x^2 - 4 < 0$

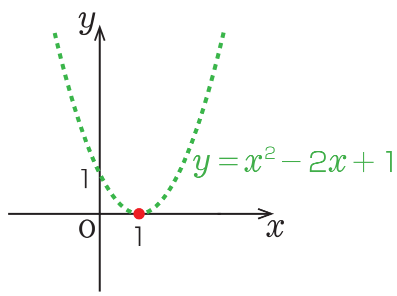
$-2 < x < 2$



（2）$y = x^2 - 2x + 1$　のグラフは，x 軸に接している，

つまり共有点が1つなので

$x = 1$　が解になります。



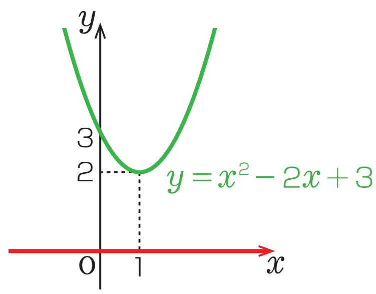
（3）$y = x^2 - 2x + 3$　のグラフは，

x 軸との共有点がありません。

つまり，

x がどんな値を取っても $y > 0$ が成立するので，

不等式の解は「すべての実数」となります。



2 2次方程式の実数条件

高校数学Ⅰで扱う方程式の解は実数です。これを実数解といいます。
実数解以外の解は高校数学Ⅰでは“解なし”として扱います。
少し難しい話になりますが，高校数学Ⅱに進むと，実数解以外の解も扱います。

さて、実数とはなんだったでしょうか？

$-2,\ -1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{7}$ などは有理数

そして，

$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6}$ などは無理数でした。

ここで$\sqrt{}$ の中の数は0以上です。（ルートの中が負の数になると実数ではなくなります）

これら有理数と無理数を合わせて実数といいます。
くわしくは，＃5で復習しましょう！

やってみよう！

2次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ が実数解を持つとき，実数 k の値の範囲を定めなさい。

【答 え】

2次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ を解の公式で解くと

$$x = \frac{-(-k) \pm \sqrt{(-k)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

これが実数であるから根号の中は0以上（$\sqrt{}$ の中の数は0以上）

ですから，$k^2 - 4 \geqq 0$

左辺を因数分解して $(k + 2)(k - 2) \geqq 0$

この2次不等式を解いて　$k \leqq -2$　または　$2 \leqq k$ と求まります。

3　連立２次不等式

例えば，連立方程式と言えばこんなイメージだと思います。

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \cdots ① \\ x + y = 3 & \cdots ② \end{cases}$$

これを解いてみると，①−②を計算して $x = 2$

これを②に代入して $2 + y = 3$ から $y = 1$

つまりこの連立方程式の解は $x = 2$，$y = 1$

このように①②を同時に満たす値が連立方程式の解ということです。

同じような考え方を不等式に用いたのが連立不等式です。

例 題

次の連立不等式を解きなさい。

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - x - 12 \leqq 0 \end{cases}$$

【解 説】

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 & \cdots ① \\ x^2 - x - 12 \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

まず，不等式①を解きます。

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x - 1)(x - 2) > 0$

よって，$x < 1$，$2 < x$

次に不等式②を解きます。

$x^2 - x - 12 \leqq 0$

$(x - 4)(x + 3) \leqq 0$

よって，$-3 \leqq x \leqq 4$

等号を含む不等号の場合は黒丸にして数直線上からまっすぐ（直角）にかき，

等号を含まない不等号の場合は白丸にして斜めにかきます。

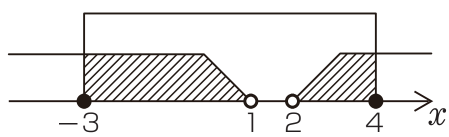
右下の図のように，

連立つまり①②を同時に満たす値の範囲が斜線部分ですから，

求める x の範囲は共通部分の

$-3 \leqq x < 1$，$2 < x \leqq 4$

これが連立不等式①②の解です。



やってみよう！

次の連立不等式を解きなさい。

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 < 0 \cdots ① \\ x^2 - 6x + 5 \leqq 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

【答 え】

まず不等式①を解くと

$(2x - 1)(x - 3) < 0$ より

$\frac{1}{2} < x < 3$

次に不等式②を解くと

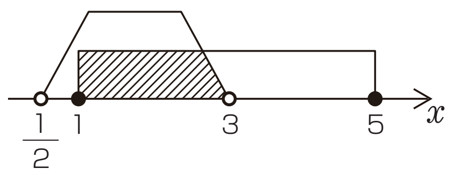
$(x - 1)(x - 5) \leqq 0$ より

$1 \leqq x \leqq 5$

①②を共に満足するのは

右図の数直線の斜線部分であるから，

求める解は $1 \leqq x < 3$ と求まる。



4　２次不等式の文章題

例 題

A さんがボールを真上に投げ上げてから x 秒後の，手を離れた位置からのボールの高さ y メートルは，$y = -5x^2 + 30x$ で表される。ボールの高さが，25 メートル以上であるのは，何秒後から何秒後までか？

【解 説】

x 秒後のボールの高さは y(m) ですから

投げ上げてから x 秒後の高さが 25m 以上であるとは

y が 25 以上であるということです。

したがって，$y \geqq 25$

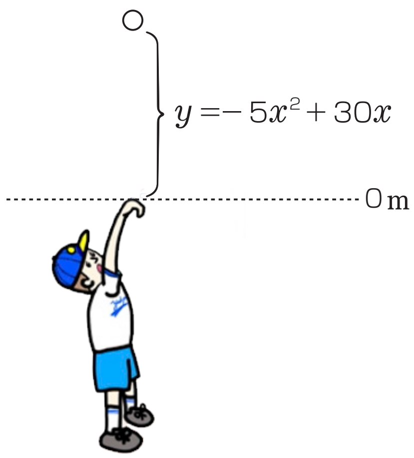
つまり，$-5x^2 + 30x \geqq 25$　を解きます。

$-5x^2 + 30x \geqq 25$

$x^2 - 6x + 5 \leqq 0$

$(x - 1)(x - 5) \leqq 0$

よって，１秒後から５秒後まで。



やってみよう！

地上から物体を，秒速 50m で真上に打ち上げたとき，x 秒後の物体の高さ ym は $y=-5x^2+50x$ で表されるものとする。打ち上げてから x 秒後の物体の高さが 80m 以上 120m 以下であるのは，x の値がどのような範囲にあるときか。

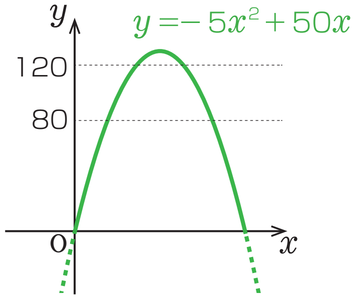
【答 え】

x 秒後の物体の高さが y(m) で,

打ち上げてから x 秒後の物体の高さが 80m 以上 120m 以下なので,

$80 \leqq x \leqq 120$

つまり、$80 \leqq -5x^2+50x \leqq 120$



これは

左辺≦ 中辺・・・①

中辺≦ 右辺・・・②

の連立不等式と見ることができます。

したがって

$$\begin{cases} 80 \leqq -5x^2+50x \cdots ① \\ -5x^2+50x \leqq 120 \cdots ② \end{cases}$$

この連立不等式を解きます。

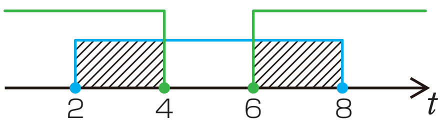
まず、①の両辺を５で割って整理すると　$x^2-10x+16 \leqq 0$

つまり $(x-2)(x-8) \leqq 0$ から $2 \leqq x \leqq 8$

次に②の両辺を（－５）で割って整理すると $x^2-10x+24 \geqq 0$

つまり $(x-4)(x-6) \geqq 0$ から $x \leqq 4$ または $6 \leqq x$

①②をともに満足するのは以下の数直線の斜線部分であるから,



求める x の値の範囲は　$2 \leqq x \leqq 4$　または $6 \leqq x \leqq 8$

おすすめ番組

☆「アクティブ１０　マスと！」 関数 $y = ax^2$

CLICK!