

2次不等式

講師

湯浅 弘一

1 1次不等式を解く


例題

不等式 $2x - 6 < 0$ を解きなさい。

【解説】

方程式を解くときと同様に、 x を含む式を左辺に、定数項を右辺に移項します。

$2x < 6$ より 両辺を 2 で割って $x < 3$ と求められます。

やってみよう! 

- (1) 不等式 $3x - 6 < 0$ を解きなさい
- (2) 不等式 $-2x - 6 < 0$ を解きなさい

【答え】

(1) $3x - 6 < 0$

$$3x < 6$$

$$x < 2$$

(2) $-2x - 6 < 0$

$$-2x < 6$$

$$x > -3$$

Point このとき、負の数で不等式を割ると不等号の向きが変わることに注意!

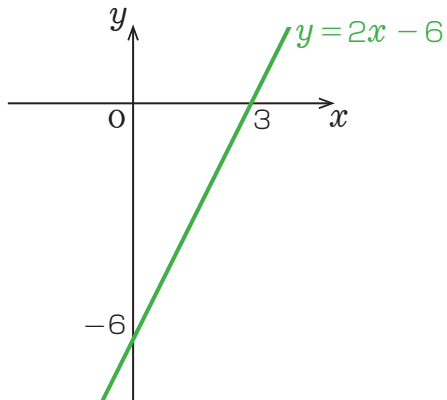
2 グラフを使って1次不等式を解く

先ほどの例題「不等式 $2x - 6 < 0$ を解きなさい」をグラフで見てください。

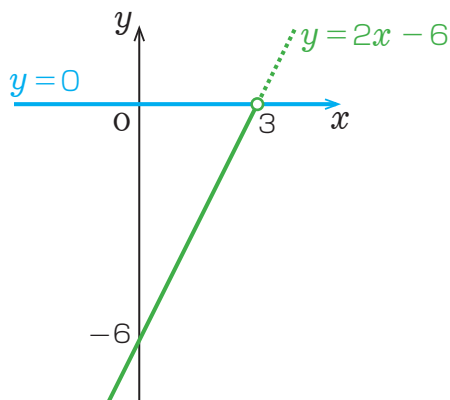
式の左辺に “ $y =$ ” を付けてみます。

すると、 $y = 2x - 6$

下のようなグラフになります。



$2x - 6 < 0$ ということは、 $y < 0$ ですから、 $y = 0$ つまり x 軸より下の部分になります。

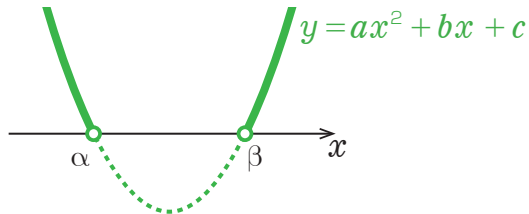


求めるのは x の範囲なので、 $x < 3$ となります。

3 2次不等式を解く

$a > 0$ として $ax^2 + bx + c > 0$ とは

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフが $y = 0$ (x 軸) より上にあるということです。



$y = ax^2 + bx + c$ が $y = 0$ (x 軸) と2点で $x = \alpha, \beta$ で交わったとします。

このとき、 $y = ax^2 + bx + c$ が $y = 0$ (x 軸) より上にある x の範囲はどこでしょうか？

上の図で、グラフを太い実線にしたところ です。

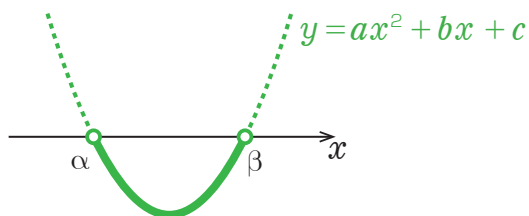
この x の範囲は、 $x < \alpha$ または $\beta < x$ の2か所になります。

したがって、 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) の解は $x < \alpha$ または $\beta < x$

同じように

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$y = ax^2 + bx + c$ が $y = 0$ (x 軸) より下にあるということです。



したがって、 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) の解は $\alpha < x < \beta$ と求められます。

例題

2次不等式 $x^2 - 4 > 0$ を解きなさい。

【解説】

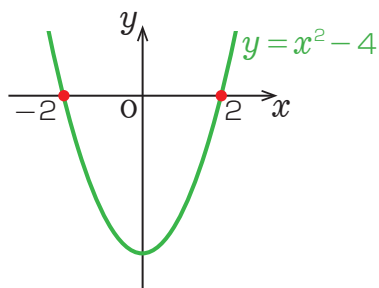
左辺に “ $y =$ ” をつけてグラフをかいて考えましょう。

$y = x^2 - 4$ のグラフが x 軸と交わるのは、 $y = 0$ のときなので

$0 = x^2 - 4$ の方程式の解が x 座標になります。

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

つまり、 -2 と 2 で x 軸と交わります。

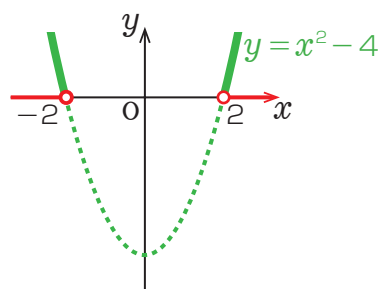


$x^2 - 4 > 0$ とは、

$y = x^2 - 4$ のグラフが x 軸より上にあるとき

なので、

不等式の解は $x < -2$, $2 < x$



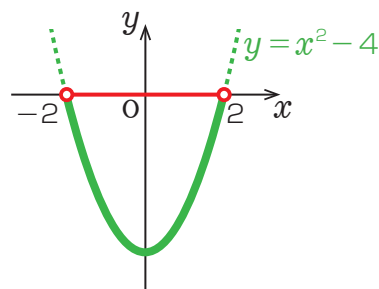
不等号が逆だったら・・・

$x^2 - 4 < 0$ とは、

$y = x^2 - 4$ のグラフが x 軸より下にあるとき

なので、

不等式の解は $-2 < x < 2$



練習問題

- (1) 2次不等式 $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ を解きなさい。
 (2) 2次不等式 $-x^2 + 3x + 10 > 0$ を解きなさい。

【答え】

(1) $y = x^2 + 2x - 3$ のグラフが x 軸と交わるのは、 $y = 0$ のときなので

$0 = x^2 + 2x - 3$ の方程式の解が x 座標になります。

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

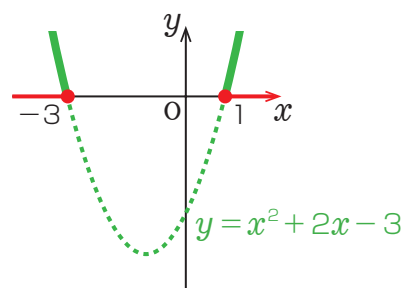
つまり、 $x = -3, 1$ で x 軸と交わります。

$x^2 + 2x - 3 \geq 0$ とは、

$y = x^2 + 2x - 3$ のグラフが x 軸より上にあるとき

なので、

不等式の解は $x \leq -3, 1 \leq x$



(2) $-x^2 + 3x + 10 > 0$

これを次のように変形させて考えます。

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

すると、

$y = x^2 - 3x - 10$ のグラフが x 軸と交わるのは、 $y = 0$ のときなので

$0 = x^2 - 3x - 10$ の方程式の解が x 座標になります。

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

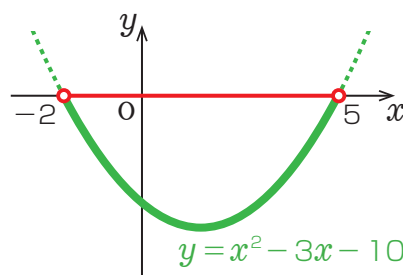
つまり、 $x = -2, 5$ で x 軸と交わります。

$x^2 - 3x - 10 < 0$ とは、

$y = x^2 - 3x - 10$ のグラフが x 軸より下にあるとき

なので、

不等式の解は $-2 < x < 5$



やってみよう!

(1) 2次不等式 $x^2 + 2x - 8 < 0$ を解きなさい。

(2) 2次不等式 $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ を解きなさい。

【答え】

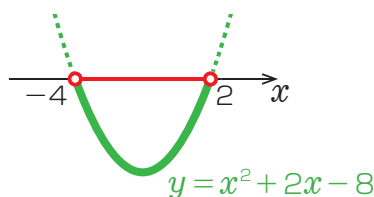
(1) $y = x^2 + 2x - 8$ のグラフが $y = 0$ (x 軸) の下側にある x の範囲を求めます。

$$y = x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

より、 x 軸との交点は $x = -4$ または 2

右のグラフより、

求める x の範囲は $-4 < x < 2$



(2) $y = x^2 + 3x - 4$ のグラフが

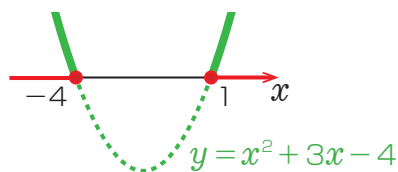
$y = 0$ (x 軸) と接する、または上側にある x の範囲を求めます。

$$y = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

より、 x 軸との交点は $x = -4$ または 1

右のグラフより、

求める x の範囲は $x \leq -4, 1 \leq x$



Point 不等号に等号がついているということは、 x 軸上の点も適するので、この不等式の解には等号がつきます！

例題

2次不等式 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ を解きなさい。

【解説】

左辺に “ $y =$ ” をつけた式をグラフにすると右図のようになります。

このグラフが $y \leq 0$ 、つまり x 軸と同じか下にあるのは

$x = 1$ のときだけなので

解は、 $x = 1$ と求まります。

