第17回

グラフと2次方程式

講師
湯浅 弘一

1 方程式の解を視覚化する

1次方程式 $2x-6=0$ を考えてみます。

一般的に解くと･･･

$2x-6=0$ の左辺から-6を移項して

$2x=6$

両辺を2で割って

$x=3$

です。

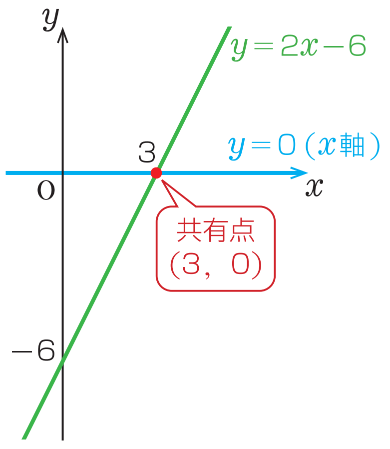
これをグラフで考えてみます。

$2x-6=0$ とは，$y=2x-6$ と $y=0$ を連立したものです。

つまり･･･

$$\begin{cases} y=2x-6 \\ y=0 \ (x\text{軸}) \end{cases}$$

グラフで見ると以下の通りです。



2つのグラフが重なるところを「共有点」といいます。

この場合，共有点は（3，0）です。

共有点の x 座標は3。方程式 $2x-6=0$ の解 $x=3$ が視覚化されました。

2　２次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

例 題

２次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ と x 軸との共有点の座標を求めなさい。

【解 説】

x 軸とは $y = 0$ なので，$y = x^2 - 2x - 3$ との共有点を求めるためには，２つの式を連立して

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 0 \ (x \text{軸}) \end{cases}$$

これを１つの方程式の形にすると

$x^2 - 2x - 3 = 0$

この左辺は因数分解できるので

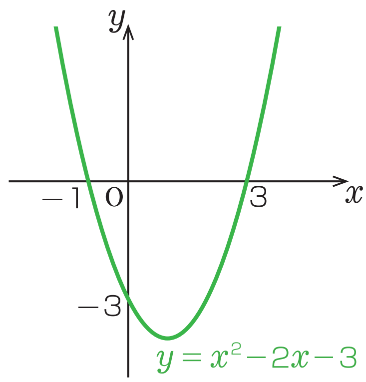
$(x + 1)(x - 3) = 0$

よって，$x + 1 = 0$ または $x - 3 = 0$

つまり $x = -1$ または $x = 3$

ということは，

求める共有点の座標は（-1，0）と（3，0）となります。



やってみよう！

２次関数 $y = x^2 + 2x - 3$ と x 軸との共有点の座標を求めなさい。

【答 え】

x 軸とは $y = 0$ なので，$y = x^2 + 2x - 3$ と連立して方程式の形にすると

$x^2 + 2x - 3 = 0$

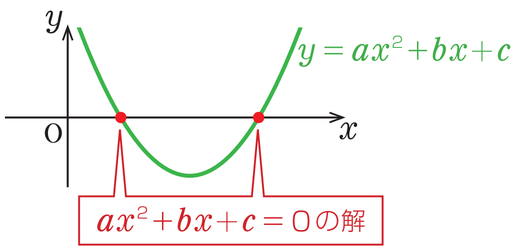
これを因数分解して $(x + 3)(x - 1) = 0$

よって，$x = -3$ または $x = 1$ より

求める共有点の座標は（-3，0），（1，0）

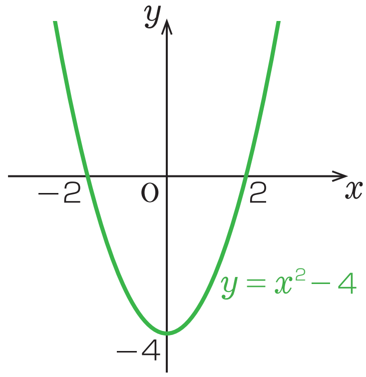
参　考　２次関数のグラフと x 軸の共有点

２次関数 $y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。

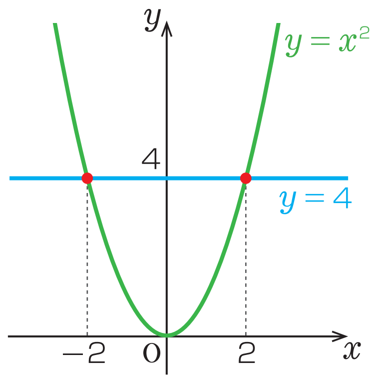


3　２次方程式と２次関数の関係

ここまで見てきたように，（x の２次方程式）＝０ の解は
２次関数と x 軸との共有点の x 座標と考えることができます。
つまり，２次方程式の解も視覚化できるのです。
例えば・・・
２次方程式 $x^2-4=0$ を考えます。
一般的に解くと，左辺を因数分解して
$(x+2)(x-2)=0$ より $x=\pm 2$ と求まります。
これを先ほどと同様にして
$y=x^2-4$ のグラフをかいて確かめると，
確かに x 軸との共有点の座標は（−２，０）（２，０）です。
つまり，この方程式の解 $x=\pm 2$ と一致します。



ここで見方を変えてみましょう。
$x^2-4=0$ を $x^2=4$ として，左辺と右辺を別々な関数とみると
$x^2=4$ は $y=x^2$ と $y=4$ の共有点の x 座標とみることができます。
つまり，$y=x^2$ と $y=4$ を連立したことと同じです。
グラフで確かめてみましょう。
右図のように，
共有点の x 座標は $x=\pm 2$ と確認できます。

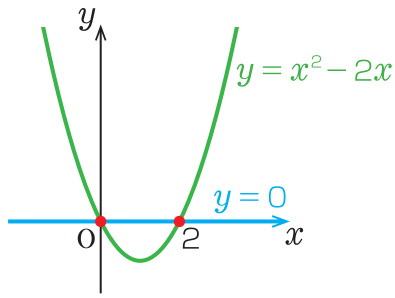


やってみよう！

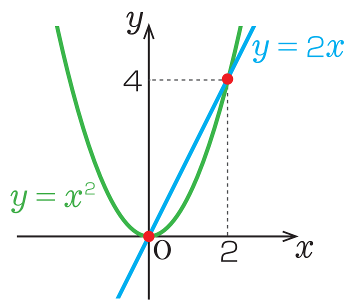
２次方程式 $x^2-2x=0$ の解は $x=0$ または２です。
これをグラフで確かめなさい 。

【解 説】
確かめる方法は２種類あります。

《 答え① 》
$y=x^2-2x$ と $y=0$ の共有点の x 座標を考えます。
右のグラフから
２つのグラフの共有点の x 座標は
$x=0$ または２であることが確認できます。



《 答え② 》
$x^2-2x=0$ を $x^2=2x$ と変形し連立方程式の形にします。
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$$
右のグラフから
グラフの共有点の x 座標は
$x=0$ または２であることが確認できます。



4　２次関数のグラフと x 軸の位置関係

例題

x 軸と２点（１，０），（３，０）で交わる２次関数が（０，１）を通るとき，
この２次関数の式を求めなさい。

【解 説】

x 軸と２点（１，０），（３，０）で交わるということは，
求める２次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標が１と３ということです。
つまり，$y = a(x-1)(x-3) \cdots ①$　ただし，$a \neq 0$
このとき，①において x の２次の係数 a を付け忘れないことが大事です。
$y = a(x-1)(x-3) \cdots ①$ が（０，１）を通るので， 代入すると
$1 = 3a$
これを解いて，

$$a = \frac{1}{3}$$

であるから，①より求める２次関数は

$$y = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$

と求められます。

やってみよう！

x 軸と２点（−１，０），（３，０）で交わる２次関数が（０，３）を通るとき，
この２次関数の式を求めなさい。

【答 え】

x 軸と２点（−１，０），（３，０）で交わる２次関数は
$y = a\{x-(-1)\}(x-3)$
つまり，$y = a(x+1)(x-3) \cdots ①$　とかくことができます。ただし，$a \neq 0$
このとき，①が（０，３）を通るので代入すると
$3 = -3a$
これを解いて，$a = -1$ であるから，①より求める２次関数は
$y = -(x+1)(x-3)$
と求められます。

やってみよう！

$y=x^2-3x-3$ と x 軸との共有点の座標を求めなさい。

【答 え】

$y=x^2-3x-3$ と x 軸（$y=0$）を連立して

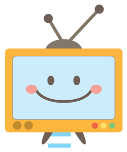
$x^2-3x-3=0$

この２次方程式は因数分解できないので，解の公式を用いると

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}\quad\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$$

よって，求める座標は

$$\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2},\ 0\right)$$



おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
第 20 回 文章題から２次方程式を作って解くこと
２直線の位置関係

CLICK!