第 16 回

2次方程式を解く

講師
湯浅 弘一

1 方程式とは

□＋５＝８ となる□はなんでしょうか？

□＝３ です。

この□を x にすると上の式は

$x+3=8$

となります。

この等式 $x+3=8$ は $x=5$ のときに成り立ちます。

このように，式の中の文字 x にある値を代入して成り立つ等式を方程式といいます。

この方程式を成り立たせる x の値をこの方程式の解といい，

この解をすべて求めることを方程式を解くといいます。

例 題

４つの式のうち、２次方程式はどれでしょうか？

A　$3x+1=7$

B　x^2-5x+6

C　$x^2-5x+6=0$

D　$x^2=4$

【解 説】

B は「＝」がないため，方程式ではありません。

A は x が含まれる項が１次の項だけなので，１次方程式です。

よって答えは，C と D です。

やってみよう！

1 次方程式 $3x-1=8$ を解きなさい。

【答 え】

$3x-1=8$

$3x=8+1$

$3x=9$

$x=3$

※ 1 次方程式は x を含む項を左辺に，定数項を右辺に移項するのが原則です。

やってみよう！

1 次方程式 $3(x-2)-2=x$ を解きなさい。

【答 え】

展開してカッコをはずします。

$3(x-2)-2=x$

$3x-6-2=x$

$3x-x=2+6$

$2x=8$

$x=4$

2　2次方程式を因数分解で解く

1次の項がない2次方程式は，平方根を使って解くことができます。

$x^2=4$

$x=\pm 2$

3　２次方程式を因数分解で解く

２次方程式を因数分解で解く方法もあります。
たとえば AB＝0となる A や B は何でしょうか？
すぐにわかることは A または B が0だということです。
両方同時に0の場合もあります。この AB＝0という式のイメージを使います。

例題

２次方程式 $x^2-5x+6=0$ を解きなさい。

【解説】

$x^2-5x+6=0$ の左辺を因数分解すると

$(x-2)(x-3)=0$ です。

ということは，$x-2=0$ または $x-3=0$ ですから

$x=2$ または $x=3$ です。

これを，$x=2,\ 3$ とかくこともできます。

やってみよう！

２次方程式 $x^2+3x-4=0$ を解きなさい。

【答え】

$x^2+3x-4=0$ の左辺を因数分解すると

$(x+4)(x-1)=0$

よって，$x+4=0$ または $x-1=0$

つまり，$x=-4$ または $x=1$

例題

２次方程式 $x^2-14x+49=0$ を解きなさい。

【解説】

$x^2-14x+49=0$

$(x-7)^2=0$

$x=7$　※２つの解が同じになることを重解といいます。

4　２次方程式を解の公式で解く

２次方程式を解くための公式として解の公式があります。

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例題

２次方程式 $2x^2+3x-4=0$ を解きなさい。

【解説】

$2x^2+3x-4=0$ を $ax^2+bx+c=0$ に対応させると，

$a=2$，$b=3$，$c=-4$

これを解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に代入して

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$$

やってみよう！

２次方程式 $4x^2-5x-3=0$ を解きなさい。

【答え】

$4x^2-5x-3=0$ を $ax^2+bx+c=0$ に対応させると，

$a=4$，$b=-5$，$c=-3$

これを解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に代入して

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times4\times(-3)}}{2\times4}=\frac{5\pm\sqrt{73}}{8}$$

例 題

２次方程式 $(3x-2)^2=4$ を解きなさい。

【解 説】

「平方根」「因数分解」「解の公式」すべての方法で解くことができます。

〔1〕平方根

$$(3x-2)^2=4$$
$$3x-2=\pm 2$$
$$3x=\pm 2+2$$
$$3x=0,\ 4$$

よって，$x=0,\ \dfrac{4}{3}$

〔2〕因数分解

$$(3x-2)^2=4$$
$$(3x-2)^2-4=0$$
$$(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2-4=0$$
$$9x^2-12x=0$$
$$3x(3x-4)=0$$

よって，$3x=0$ または $3x-4=0$

$3x=0$ より $x=0$

$3x-4=0$ より $x=\dfrac{4}{3}$

したがって，$x=0,\ \dfrac{4}{3}$

〔3〕解の公式

上の〔2〕を参照！

$(3x-2)^2=4$

展開して整理すると

$9x^2-12x=0$

これを $ax^2+bx+c=0$ に対応させると，

$a=9,\ b=-12,\ c=0$

これを解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\ b^2-4ac}{2a}$ に代入して

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times 9\times 0}}{2\times 9}=\frac{12\pm\sqrt{144}}{18}=\frac{12\pm 12}{18}=\frac{2\pm 2}{3}$$

よって，$x=0,\ \dfrac{4}{3}$

☆★☆（参考）２次方程式の解の公式の証明 ☆★☆

２次方程式の解の公式を導いてみましょう。

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺を平方完成します。

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \end{aligned}$$

これが右辺の０と等しいので

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

x を求めたいので，x を含まない項を右辺に移項して，さらに通分すると

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a}-c \\ &= \frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

この両辺を a で割って通分すると

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

この平方根を考えて

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
第 17 回 ２次方程式
２次方程式の解の公式

CLICK!

☆「高校講座　ベーシック数学」
第 18 回 文章題から２次方程式を作って解くこと
２次方程式の利用

CLICK!