第15回

2次関数のグラフを応用する

講師
湯浅 弘一

1 2次関数の決定

同一直線上にない３点を通る２次関数は１つに定まります。

例題

３点（－１，－３）（１，１）（２， ０）を通る２次関数の式を求めなさい。

【解 説】

求める２次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）とします。

これは，点（－１，－３）を通るので，代入すると

$-3 = a - b + c$ ・・・①

同様にして（１，１）を通るので

$1 = a + b + c$ ・・・②

また（２， ０）を通るので

$0 = 4a + 2b + c$ ・・・③

②－①を計算すると，$b = 2$

これを①，③にそれぞれ代入して式を整理すると

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = -4 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $a = -1$， $c = 0$

よって，求める２次関数の式は

$y = -x^2 + 2x$

やってみよう！

3 点（0，0）（－4，0）（1，－10）を通る 2 次関数の式を求めなさい。

【答 え】

求める 2 次関数の式を $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）とおく。

点（0，0）を通るので，上の式に代入すると

$0=c$ ・・・①

同様にして（－4，0）を通るので

$0=16a-4b+c$ ・・・②

また（1，－10）を通るので

$-10=a+b+c$ ・・・③

①から $c=0$ を②，③にそれぞれ代入して式を整理すると

$$\begin{cases} 4a-b=0 \\ a+b=-10 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $a=-2$，$b=-8$

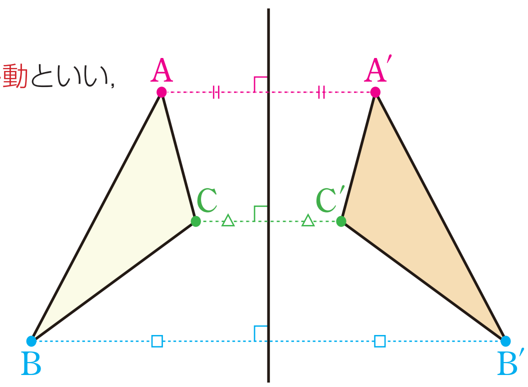
よって，求める2次関数の式は

$y=-2x^2-8x$

2 対称移動

図形を，ある直線を折り目として折り返す移動を線対称移動といい，このとき，その折り目の直線を対称の軸といいます。

右の図の場合，△ABC を線対称に移動したものが△A′B′C′ となります。

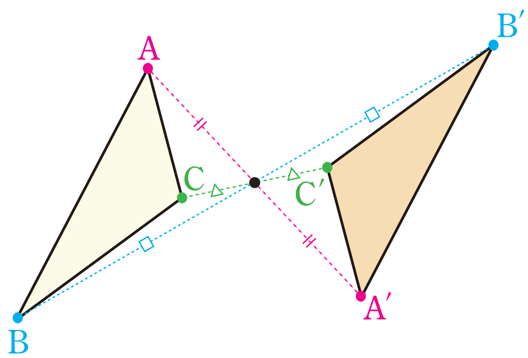


図形をある 1 点を中心に 180 度回転した移動を点対称移動といい，この点を回転の中心といいます。

点対称の図形をかくときは回転の中心を O として，

AO = OA′，BO = OB′，CO = OC′

となるようにかきます。



3　2次関数の対称移動

やってみよう！

$y = x^2 + 1$ を x 軸に関して対称移動して得られる放物線の式を求めなさい。

【解 説】

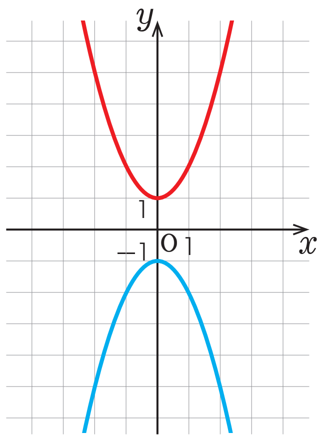
放物線 $y = x^2 + 1$ の頂点は（0，1）

この点を x 軸に関して対称移動すると，点（0，−1）

さらに，形は下に凸から上に凸に変わるので

2次関数の2次の係数の符号がマイナスに変わります。

よって，求める放物線は $y = -x^2 - 1$



やってみよう！

$y = (x - 2)^2 + 1$ を原点 O に関して対称移動して得られる放物線の式を求めなさい。

【解 説】

放物線 $y = (x - 2)^2 + 1$ の頂点は（2，1）

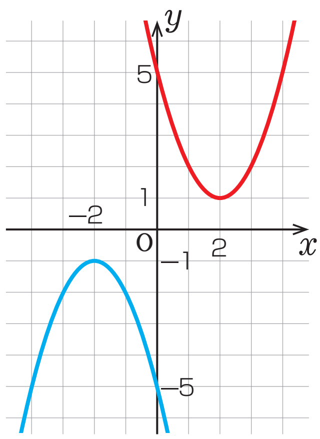
この点を原点 O に関して対称移動（180°回転）すると，

グラフの形は下に凸から上に凸に変わるので

2次の係数の符号がマイナスに変わります。

また，頂点は x 座標も y 座標も符号が変わるので（−2，−1）

よって，求める放物線は $y = -(x + 2)^2 - 1$

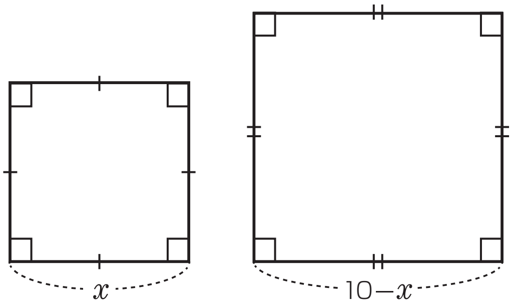


4 ２次関数の最大，最小の応用

例題

２つの正方形があります。それぞれの１辺の長さを足すと１０cm です。
この正方形２つの面積の和が最小になるとき，１つの正方形の１辺の長さは
何 cm になるでしょう？

【解 説】



右図のように
１つの正方形の１辺の長さを x cm とすると
一方の正方形の面積は x^2 cm^2
もう一方の正方形の面積は $(10-x)^2$ cm^2

面積の和を y と置くと，

$$y = x^2 + (10-x)^2$$

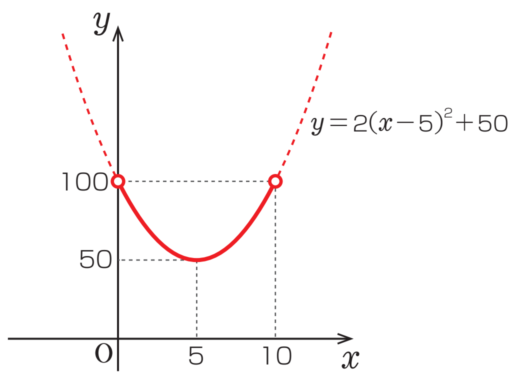
これを x の２次関数と考えて

$y = x^2 + (10-x)^2$ の最小値を求めます。

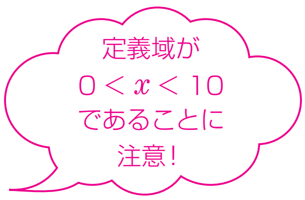
右辺を平方完成します。

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (10-x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x-5)^2 + 50 \end{aligned}$$

$0 < x < 10$ より



。



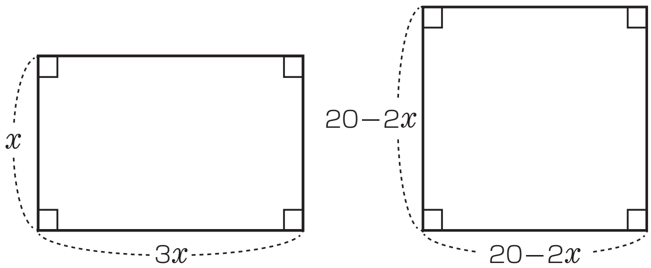
したがって，$x = 5$ のとき最小値をとるので，２つの正方形の面積の和が最小になるのは、
一方の正方形の１辺の長さが５cm のときです。

やってみよう！

長さ 80cm の針金があります。これを 2 本に切ってそれぞれを折り曲げて，1つは正方形を作り，もう1つは長辺の長さが短辺の長さの 3 倍となる長方形を作ります。この正方形と長方形の周の和の長さを 80cm とするとき，それぞれの面積の和を S として，S を最小にする長方形の針金の短辺の長さを求めなさい。

【答え】

長方形の短辺の長さを x cm とすると
長辺の長さは $3x$ cm と定まるので，
長方形のまわりの長さは $8x$ cm。
このとき，
残りの針金の長さは $(80-8x)$ cm
この長さについては
$80-8x>0$ より $0<x<10$



【長方形】　【正方形】

この範囲で残りの針金からできる正方形の1辺の長さは

$$\frac{1}{4}(80-8x)=20-2x\ (\mathrm{cm})$$

と求められるので，正方形と長方形の面積の和 S は

$$\begin{aligned}
S &= (20-2x)^2+3x\times x \\
&= 400-80x+4x^2+3x^2 \\
&= 7x^2-80x+400 \\
&= 7\left(x^2-\frac{80}{7}x\right)+400 \\
&= 7\left\{\left(x-\frac{40}{7}\right)^2-\frac{1600}{49}\right\}+400 \\
&= 7\left(x-\frac{40}{7}\right)^2-7\times\frac{1600}{49}+400 \\
&= 7\left(x-\frac{40}{7}\right)^2-\frac{1600}{7}+400 \\
&= 7\left(x-\frac{40}{7}\right)^2+\frac{1200}{7}
\end{aligned}$$

よって，S は $x=\dfrac{40}{7}$ のとき最小になることがわかるので，

S を最小にする長方形の針金の短辺の長さは，$\dfrac{40}{7}$ cm