第９回

１次不等式を解く

講師
湯浅 弘一

1 不等式とは

数量の大小関係を不等号 ＞，＜， ≧， ≦ を使って表した式を不等式といいます。

例 題

次の文を不等式で表しなさい。
桃太郎は１個 15g のきびだんごを x 個持っている。合計は 210g より重い。

【答 え】
$15x > 210$

やってみよう！

ある数 x を２倍して３を引いた数は７未満である。
これを x を用いた不等式で表しなさい。

【解 説】
A は B 未満は，A ＜ B と表します。
ある数 x を２倍して３を引いた数は

$x \times 2 - 3 = 2x - 3$

です。
これが７未満ということですから，

$2x - 3 < 7$

と表すことができます。

Point 不等式で表すだけなので，この不等式を解いてはいけません。
ちなみに解くと $x < 5$ となります！

2 不等式の性質

不等式の両辺に同じ数を足したり引いたりしても不等号の向きは変わりません。
たとえば，
「3＜5」の両辺に2を足すと　3＋2＜5＋2
「3＜5」の両辺から2を引くと　3－2＜5－2
となります。

不等式の両辺に同じ正の数をかけたりわったりしても不等号の向きは変わりません。
「3＜5」の両辺に2をかけると　3×2＜5×2
「3＜5」の両辺を2でわると　3÷2＜5÷2
となります。

しかし，不等式の両辺に同じ負の数をかけたりわったりするときは要注意です。
不等号の向きが変わります。
たとえば，
「3＜5」の両辺に−2をかけると　3×(−2)＞5×(−2)
3＜5　の両辺を−2でわると　3÷(−2)＞5÷(−2)
となります。

少し難しい言い方をすると…

(1) $a<b$ ならば両辺に c を足したり引いたりしても不等号の向きは変わりません。
　つまり，$a+c<b+c$，$a-c<b-c$ が成り立ちます。
(2) $a<b$ のとき両辺に $c>0$ をかけたり，わったりしても不等号の向きは変わりません。
　つまり，$ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$ が成り立ちます。
(3) $a<b$ のとき両辺に $c<0$ をかけたり，わったりすると不等号の向きが変わります。
　つまり，$ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$ が成り立ちます。

やってみよう！

$a < b$ のとき、次の□に適する不等号の記号を入れなさい。

（1）$a + 2 \ \square \ b + 2$　　（2）$-3a \ \square \ -3b$

（3）$a - 2 \ \square \ b - 2$　　（4）$1 - a \ \square \ 1 - b$

【解 説】

（1）$a + 2 < b + 2$

（2）$a < b$ の両辺に同じ負の数をかけたり，わったりすると不等号の向きが変わるので

$-3a > -3b$ です。

（3）$a - 2 < b - 2$

（4）$a < b$ の両辺に（-1）倍をすると $-a > -b$

この両辺に1を加えて $1 - a > 1 - b$

Point　$1 - a$ を $1 \vdots -a$ のように，項に区切って考えるとわかりやすくなります。

3　1次不等式の解き方

方程式を解くのと同じ手順を踏みます。注意すべき点は，両辺に同じ負の数をかけたり，わったりすると不等号の向きが変わるところです。

練習問題1

次の不等式を解きなさい。

（1）$4x > 5$　　（2）$-4x > 5$

【答 え】

（1）$4x > 5$ の両辺を4でわると $x > \dfrac{5}{4}$ と求められます。

（2）$-4x > 5$ の両辺を（-4）でわると $x < -\dfrac{5}{4}$ と求められます。

※（2）の答えですが，$-\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{-4} = \dfrac{-5}{4}$ と表現ができます。

単純に $-4x > 5$ の両辺を（-4）でわると $x < \dfrac{5}{-4}$ です。

ここで解答を終えても間違いではありませんが，一般的には $x < -\dfrac{5}{4}$ と書きます。

やってみよう！

次の不等式を解きなさい。

（1）$3x > 6$　　（2）$-2x > 6$

（3）$4x - 1 \leqq 7$　　（4）$-3x + 1 \leqq 15$

【解 説】

（1）$3x > 6$

両辺を3でわると，$x > \dfrac{6}{3}$

となるので，　$x > 2$

（2）$-2x > 6$　　負の数でわったので，不等号の向きが変わることに注意しましょう！

両辺を(-2)でわると，$x < -\dfrac{6}{2}$

となるので，　$x < -3$

（3）$4x - 1 \leqq 7$

両辺に1をたすと，$4x \leqq 7 + 1$　移項！

$4x \leqq 8$

両辺を4でわると，　$x \leqq \dfrac{8}{4}$

となるので，　$x \leqq 2$

（4）$-3x + 1 \leqq 15$

両辺から1を引くと，$-3x \leqq 15 - 1$　移項！

$-3x \leqq 14$

両辺を(-3)でわると，　$x \geqq -\dfrac{14}{3}$

4 文字を含む1次不等式

文字を含んだ1次方程式を解いてみましょう。

> 例題
>
> x の不等式 $ax > 1$ を解きなさい。

【解説】

$ax > 1$ から x の範囲を求めたいので，両辺を a でわります。
その際に，a の符号に注意します。

（ｉ）$a > 0$　のとき

$ax > 1$ の両辺を a でわり算すると　$x > \dfrac{1}{a}$ と求められます。

（ii）$a < 0$　のとき

$ax > 1$ の両辺を a でわり算すると

不等号の向きが変わるので　$x < \dfrac{1}{a}$ と求められます。

（iii）$a = 0$　のとき

$a = 0$のとき，元の不等式が $0x > 1$ となります。

つまり，$0 > 1$ となり，不等号の向きに誤りが生じます。

このように，$0x > 1$ を満たす x がないことを“解なし”といいます。

答えをまとめると

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{a} & (a > 0) \\ x < \dfrac{1}{a} & (a < 0) \\ \text{解なし} & (a = 0) \end{cases}$$

やってみよう！

x の不等式 $ax < 1$ を解きなさい。

【答え】

（ｉ）$a > 0$　のとき

$ax < 1$ の両辺を a で割り算すると　$x < \dfrac{1}{a}$ と求められます。

（ⅱ）$a < 0$　のとき

$ax < 1$ の両辺を a で割り算すると

不等号の向きが変わるので　$x > \dfrac{1}{a}$ と求められます。

（ⅲ）$a = 0$　のとき

$ax < 1$ は，$0x < 1$ となります。

これは，$0 < 1$ ですから，正しい不等式です。

さらに，$0x < 1$ の x にどんな値を代入しても不等式は成り立ちます。

したがって，x はすべての実数です。

答えをまとめると

$$\begin{cases} x < \dfrac{1}{a} & (a > 0) \\ x > \dfrac{1}{a} & (a < 0) \\ x \text{ はすべての実数} & (a = 0) \end{cases}$$