第７回

ルートの有理化

講師
湯浅 弘一

1 ルートの除法

ルートの乗法のときと同じ考え方をします。

$a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ と表します。

例 題

$\sqrt{6}\div\sqrt{2}$ を計算しなさい。

【解 説】

上の公式に当てはめます。

$$\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$$

と求められます。

練習問題 1

次の計算をしなさい。

（1）$\sqrt{12}\div\sqrt{3}$　　（2）$\sqrt{24}\div\sqrt{3}$

【答 え】

（1）$\sqrt{12}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$

Point

最後の部分を $\sqrt{\dfrac{12}{3}}=\sqrt{4}$ で終えてはいけません。

ルートをはずせるときや，ルートの中の数値を小さくできるときには，
必ずそれをおこないましょう！

（2）$\sqrt{24}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{24}{3}}=\sqrt{8}=\sqrt{2\times2\times2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

2 有理化とは

「有理化」とは，「無理数を有理数に変える」という意味です。
「分母の有理化」とは，「分母からルート（無理数）をなくすこと」，つまり，分母に根号（ルート）を含む式を変形して，分母に根号（ルート）を含まない式にすることをいいます。
なぜ，このようなことをするのか？

たとえば $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のおおよその値を求める場合を考えてみましょう。

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$（無限小数）なので

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2} = 1 \div 1.1412\cdots$$

となりますが，このような計算はちょっと難しいですね。
しかし，分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけて倍分すると，
上の式は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

と変形できます。
ここで，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ としてみると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4142\cdots}{2}$$

つまり，およそ０．７になることをイメージできるわけです。
ある程度の誤差はありますが，近似値を求めることができるので，有利化することを目指すのです。

Point 原則，分母に根号がある場合は，分母を有利化することで分母から根号をなくしましょう！

例題

$\dfrac{6}{\sqrt{6}}$ の分母を有理化しなさい。

【解説】

分母の $\sqrt{6}$ について，$\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$ を使います。

$\dfrac{6}{\sqrt{6}}$ の分母と分子に $\sqrt{6}$ をかけて倍分すると

$$\frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

例 題

$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい。

【解 説】

分母の $\sqrt{3}$ について，$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ を使います。

$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ の分母と分子に $\sqrt{3}$ をかけて倍分すると

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\times3}{3}=2$$

ちなみに…この問題の場合，分子を $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ に変形して約分した方が早いけどね…。

例 題

$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい。

【解 説】

分母の $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ のルートをなくすことを考えます。

そこで，乗法公式の和と差の積のタイプ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を思い出してください。

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$$

これを使いましょう。

与えられた式の分母と分子に $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ をかけて倍分します。

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

やってみよう！

次の式の分母を有理化しなさい。

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　　（2）$\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}$

【答え】

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}=\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}\times\dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3}=\dfrac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10})^2-3^2}=\dfrac{\sqrt{10}+3}{10-9}=\dfrac{\sqrt{10}+3}{1}$

$=\sqrt{10}+3$

3 有理化の実践

やってみよう！

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ のとき，x^2-y^2 の値を求めなさい。

【答え】

まず，x と y の分母を有理化すると

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ であるから，

$$x+y=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$$

$$x-y=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)=-2$$

を用いて，

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=2\sqrt{2}\times(-2)=-4\sqrt{2}$$

おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
　第 15 回 2次方程式 ルートの計算

CLICK!