第６回

ルートの基本計算

講師
湯浅 弘一

1 素因数分解

素数とは１とその数自身以外に約数を持たない数です。
簡単にいえば，約数が２個の数です。
小さい順に２，３，５，７， １１， １３， １７， １９， ２３，・・・
この素数を用いて，ある整数を素数だけの積に表すことを素因数分解といいます。

例 題

１００を素因数分解しなさい。

【解 説】

すだれ算を使います。
１００を割り切れる小さい素数で順に割っていきましょう。
その結果をすだれのように書いていきます。最後は１まで書くことでミスを防げます。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

この結果から，２で２回，５で２回割ることができたので，100 を素因数分解すると
100 ＝ ２ × ２ × ５ × ５
となることがわかります。

練習問題１

８４０を素因数分解しなさい。

【答 え】

すだれ算を行います。

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 840 \\ \hline
2 & 420 \\ \hline
2 & 210 \\ \hline
3 & 105 \\ \hline
5 & 35 \\ \hline
7 & 7 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

したがって，

８４０＝２×２×２×３×５×７

と素因数分解できます。

2 $\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$ （$k>0$，$a>0$）

平方根の公式の中には，

$\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$ （$k>0$，$a>0$）

があります。

なぜこうなるのかを簡単に説明すると，こうなります。

$a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ でした。

この左辺と右辺を入れ替えて

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ を使うと…

$\sqrt{k^2a}=\sqrt{k\times k\times a}=\sqrt{k}\times\sqrt{k}\times\sqrt{a}=k\sqrt{a}$ が成り立ちます。

（$\sqrt{k}\times\sqrt{k}=k$ でしたね！）

例題

次の数を $k\sqrt{a}$ の形で表しなさい。($k>0$, $a>0$)

（1）$\sqrt{20}$　　（2）$\sqrt{200}$

【解 説】

（1）20 を素因数分解すると 2 × 2 × 5 となるので，

$$\sqrt{20}=\sqrt{2\times2\times5}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

と表すことができます。

（2）200 を素因数分解すると，

$$\begin{array}{r|r} 2 & 200 \\ \hline 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sqrt{200}&=\sqrt{2\times2\times2\times5\times5}\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\\&=2\times\sqrt{2}\times5\\&=10\sqrt{2}\end{aligned}$$

練習問題２

次の数を $k\sqrt{a}$ の形で表しなさい。($k>0$, $a>0$)

（1）$\sqrt{18}$　　（2）$\sqrt{180}$

【答 え】

（1）$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

（2）$\sqrt{180}=\sqrt{2\times2\times3\times3\times5}=2\times3\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

3 $\sqrt{}$ の加法

次の計算法にしたがいます。

k，l を実数，$a>0$，$b>0$，$c>0$ とするとき，

☆ $k\sqrt{a}+l\sqrt{a}=(k+l)\sqrt{a}$ ・・・①

☆ $k\sqrt{a}-l\sqrt{a}=(k-l)\sqrt{a}$ ・・・②

$\sqrt{b}$ を $k\sqrt{a}$ に変形できないときには $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ をまとめることはできません。

ざっくばらんにいうと…

文字式の計算と同じです。

ルートの中の数が同じときを文字式の同類項とみなします。

例えば，

$a+3a=4a$

となりましたね。

ここで $a=\sqrt{2}$ とすると，

$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

と求めることができます。

ですから，

$\sqrt{2}+\sqrt{18}$ を求めるときには，

まず，$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$ と変形してから計算しましょう。

したがって，

$\sqrt{2}+\sqrt{18}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

となります。

例題

次の計算をしなさい。

（1）$\sqrt{3}+3\sqrt{3}$　（2）$\sqrt{3}-3\sqrt{3}$　（3）$\sqrt{12}+\sqrt{27}$

【解説】

（1）$\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ は，$\sqrt{3}=a$ と考えると，

$\sqrt{3}+3\sqrt{3}=a+3a=4a=4\sqrt{3}$

（2）$\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ は，$\sqrt{3}=a$ と考えると，

$\sqrt{3}-3\sqrt{3}=a-3a=-2a=-2\sqrt{3}$

（3）最初に $\sqrt{12}$ と $\sqrt{27}$ を次のように変形しましょう。

$\sqrt{12}=\sqrt{2\times2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{27}=\sqrt{3\times3\times3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

したがって，

$\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

練習問題３

次の計算をしなさい。

（1）$2\sqrt{7}-7\sqrt{7}$　（2）$\sqrt{5}-\sqrt{20}$

【答え】

（1）$2\sqrt{7}-7\sqrt{7}=-5\sqrt{7}$

（2）$\sqrt{5}-\sqrt{20}=\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

4 $\sqrt{}$ の加減の融合

次の例題を考えてみましょう。

例 題

$\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{12}+\sqrt{24}$ を計算をしなさい。

【解 説】

最初に $\sqrt{12}$ と $\sqrt{24}$ を次のように変形しましょう。

$$\sqrt{12}=\sqrt{2\times2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{24}=\sqrt{2\times2\times2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{6}$$

したがって,

$$(\text{与式})=\sqrt{3}+\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

と書くことができます。

ここで，文字式の同類項の計算と同じように考えます。

項に区切るとわかりやすくなります。

$$(\text{与式})=\sqrt{3}\ \vdots+\sqrt{6}\ \vdots-2\sqrt{3}\ \vdots+2\sqrt{6}$$
$$=\sqrt{3}\ \vdots-2\sqrt{3}\ \vdots+\sqrt{6}\ \vdots+2\sqrt{6}$$

ここで，$\sqrt{3}=a$，$\sqrt{6}=b$ と考えると

$$(\text{与式})=a-2a+b+2b=-a+3b=-\sqrt{3}+3\sqrt{6}$$

と求められます。

練習問題４

$2\sqrt{12}+\sqrt{27}-7\sqrt{3}$ を計算をしなさい。

【答 え】

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ と変形できるので,

$$2\sqrt{12}+\sqrt{27}-7\sqrt{3}=2\times2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-7\sqrt{3}$$
$$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-7\sqrt{3}$$
$$=0$$

おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
第 14 回 2次方程式 平方根を知る

CLICK!