第５回

実数、有理数、無理数

講師
湯浅 弘一

1 数の分類

- 実数
  - 有理数
    - 整　数
      - 自然数
      - 0
      - 負の整数
    - 有限小数
    - 循環小数
  - 無理数

（循環小数・無理数）無限小数

ひとつ，ふたつ，みっつ，よっつ，いつつ…のように数えるときに使う数
１, ２, ３, ４, ５, … を自然数といいます。
この自然数に，０と－１，－２，－３, … を合わせた数を整数といいます。

そして，整数 m と０でない整数 n を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表せる数を有理数といいます。

$\dfrac{2}{3}$ や $\dfrac{-2}{5}$ などが有理数です。
その他，３（整数）や 0.25（有限小数）や $0.2222\cdots=0.\dot{2}$（循環小数）も有理数です。
なぜなら，

$3=\dfrac{3}{1}$，$0.25=\dfrac{1}{4}$，$0.2222\cdots=0.\dot{2}=\dfrac{2}{9}$ と表すことができるからです。

では，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表せない数にはどんなものがあるでしょうか。
たとえば､円周率 π や，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$（無限小数）などのルートのついた数です。無理数といいます。

少し難しい話…
一般に，有理数は整数，有限小数，循環小数のいずれかで表されます。
逆に，整数は有理数であり，有限小数や循環小数も必ず分数の形に表されるので有理数です。

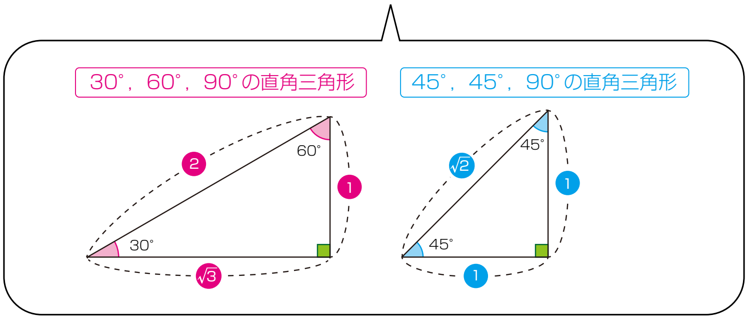
ここまで見てきた数はすべて実数です。

実数とは簡単にいうと，世の中に実在する数をいいます。

英語で表すと real number。

－２，－１，０，１，２，３，… のほか，３６．２や３７．３などは温度計や体温計でも使われていますね。

そして，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などは、直角三角形で使われたりしています。



さらに，$\dfrac{1}{2}$ や $\dfrac{1}{4}$ などはケーキなどを買うときにも使われていますよね。

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ や円周率 π などの無理数も，実在する数ですから実数に含まれます。

（参考）実在しない数については，数学Ⅱで虚数として扱います。$\sqrt{-1}=i$ と定めます。

例題

次の数について、該当する部分に○を入れなさい。

	7	π	$\frac{5}{3}$	$0.\dot{2}\dot{3}$
実数				
自然数				
有理数				
無理数				
整数				
有限小数				
循環小数				
無限小数				

【解 説】

７は実数であり，自然数であり，整数。

さらに，$7=\frac{7}{1}$ と表すことができるので，有理数でもあります。

π は無限小数の中でも $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$（分数）で表すことができないので，無理数です。

$\frac{5}{3}$ は，$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$（分数）で表すことができるので，有理数です。

小数にすると １．６６６６…と続く循環小数です。

$0.\dot{2}\dot{3}$ は循環小数。循環小数は $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$（分数）で表すことができるので，有理数です。

まとめると…

	7	π	$\frac{5}{3}$	$0.\dot{2}\dot{3}$
実数	○	○	○	○
自然数	○			
有理数	○		○	○
無理数		○		
整数	○			
有限小数				
循環小数			○	○
無限小数		○	○	○

練習問題１

次の数について、該当する部分に○を入れなさい。

	-3	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\sqrt{2}$
実数				
自然数				
有理数				
無理数				
整数				
有限小数				
循環小数				
無限小数				

【答 え】

-3は負の整数です。これは，$-\frac{3}{1}$と表せるので有理数です。

$\frac{3}{8}=0.375$となるので有理数であり，有限小数です。

$\frac{4}{11}=0.36363636\cdots=0.\dot{3}\dot{6}$ですから，循環する無限小数です。

	-3	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\sqrt{2}$
実数	○	○	○	○
自然数				
有理数	○	○	○	
無理数				○
整数	○			
有限小数		○		
循環小数			○	
無限小数			○	○

2 $\sqrt{\quad}$ の意味

２乗すると a になる数を a の平方根といいます。

例えば，２乗すると９になる数を９の平方根といいます。

ここで，２乗すると９になる数は３だけではないことに注意しましょう。

-3 も２乗すると９になりますよね。

$3^2=9$，$(-3)^2=9$

ですから，９の平方根は±３の２つです。

さて、表現方法ですが…

２乗すると a になる数を a の平方根といい、$\pm\sqrt{a}$ と表わします。

これに当てはめると，

２乗すると９になる数を９の平方根といい、$\pm\sqrt{9}=\pm 3$

と表すことができます。

このことから，$\sqrt{9}=3$ とわかります。

さらに $\sqrt{9}=3$ の両辺を２乗すると・・・

（左辺）$=(\sqrt{9})^2=9$

（右辺）$=3^2=9$

つまり，一般に $(\sqrt{a})^2=a$ となることがわかります。

簡単にいえば…

$(\sqrt{5})^2=5$　つまり　$\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

$(\sqrt{6})^2=6$　つまり　$\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$

$(\sqrt{7})^2=7$　つまり　$\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$

$(\sqrt{9})^2=9$　つまり　$\sqrt{9}\times\sqrt{9}=9$

といった感じです。

少し難しい話…

一般に $a\geqq 0$ のとき $(\sqrt{a})^2=a$

これは $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ のこと。

（参考）$a<0$ のとき $(\sqrt{a})^2=-a$ です。

例 題

次の値を求めなさい。

（1）$(\sqrt{3})^2$　　（2）$(\sqrt{4})^2$

【解 説】

$a \geqq 0$ のとき $(\sqrt{a})^2 = a$ に当てはめて考えましょう。

（1）$(\sqrt{3})^2 = 3$

（2）$(\sqrt{4})^2 = 4$

3 $\sqrt{\ }$ を使う

次の例題を考えてみましょう。

例 題

1 辺の長さが x の正方形の面積が 5 のとき，この正方形の 1 辺の長さ x を求めなさい。

【解 説】

式を立てると $x^2 = 5$ となります。ただし $x > 0$ です。

これを $(\sqrt{a})^2 = a$ に当てはめて考えると，$a = 5$ ですから

$(\sqrt{5})^2 = 5$

$x^2 = 5$ と対応させると $x = \sqrt{5}$

正方形の 1 辺の長さ $x = \sqrt{5}$ と求められます。

練習問題2

1 辺の長さが x の正方形の面積が 10 のとき，この正方形の 1 辺の長さ x を求めなさい。

【答 え】

$x^2 = 10$（ただし $x > 0$）

これを $(\sqrt{a})^2 = a$ に当てはめると，$a = 10$

$(\sqrt{10})^2 = 10$

$x^2 = 10$ と対応させると $x = \sqrt{10}$

正方形の 1 辺の長さ $x = \sqrt{10}$ と求められます。

（$\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$ が確認できます）

4 $\sqrt{\quad}$ の乗法

平方根の公式と言われている公式があります。
その中から，今回は乗法だけを扱います。
$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
が成り立ちます。

少し難しい話…

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ……①
の左辺を2乗すると
$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b=ab$
これは①の右辺の2乗になっています。
また，$\sqrt{a}>0$，$\sqrt{b}>0$ ですから $\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$
よって，これを $(\quad\quad)^2=ab$ と考えると，カッコの中は ab の正の平方根 $\sqrt{ab}$ になります。

これをざっくばらんに言えば…
$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
ということです！

例 題

次の計算をしなさい。
（1）$\sqrt{3}\times\sqrt{5}$　　（2）$\sqrt{5}\sqrt{6}$

【解 説】
（1）$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ に当てはめて，$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$
（2）$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ に当てはめて，$\sqrt{5}\sqrt{6}=\sqrt{5\times6}=\sqrt{30}$

例 題

次の計算をしなさい。
（1）$\sqrt{2}\times\sqrt{7}$　　（2）$\sqrt{5}\sqrt{13}$

【解 説】
（1）$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ に当てはめて，$\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{2\times7}=\sqrt{14}$
（2）$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ に当てはめて，$\sqrt{5}\sqrt{13}=\sqrt{5\times13}=\sqrt{65}$

チャレンジ

下の表において，それぞれの数の範囲で加減乗除を考えるとき，計算がその範囲で常にできる場合は○を，常にできるとは限らない場合には×をつけよ。
だたし，除法では０で割ることは考えないとする。

	加法	減法	乗法	除法
自然数				
整数				
有理数				
実数				

【答 え】

（自然数）＋（自然数）＝（自然数）が成り立ちます。

同じように考えて，（自然数）－（自然数）＝？

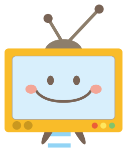
３－５＝－２ という例を考えると，結果は整数です（自然数ではありません）。

（整数）÷（整数）において２÷５＝０．４となるので，整数にはなりません。

実数同士の加減乗除はすべて実数になります。

以下がまとめたものです。

	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○



おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
　第 14 回 ２次方程式 平方根を知る

CLICK!