

第 4 回

式の展開と因数分解の応用

講師

湯浅 弘一

1 式の展開の応用

これまでに学習したことを応用して、式の展開をしましょう。

乗法公式（第2回「式の展開」P14参照）

- ・ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ・ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ・ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- ・ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

例題

上の乗法公式を用いて $(x + y + 2)^2$ を展開しなさい。

【解説】

$(x + y + 2)^2$ において、 $x + y = A$ とおくと、

$$(x + y + 2)^2 = (A + 2)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と書けます。

乗法公式（上の公式の1つめ）を用いて

$$(A + 2)^2 = A^2 + 2 \times A \times 2 + 2^2 = A^2 + 4A + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$x + y = A$ なので

$$A^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③を②に代入し、 A を $x + y$ にもどして

$$\begin{aligned} & (x + y + 2)^2 \\ &= (A + 2)^2 \\ &= A^2 + 4A + 4 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 4(x + y) + 4 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4 \end{aligned}$$

練習問題 1

$(x + 2y + 1)^2$ 展開しなさい。

【答え】

$(x + 2y + 1)^2$ において, $x + 2y = A$ とおくと,

$$(x + 2y + 1)^2 = (A + 1)^2 \dots\dots ①$$

と書けます。

乗法公式 (平方タイプ) を用いて

$$(A + 1)^2 = A^2 + 2 \times A \times 1 + 1^2 = A^2 + 2A + 1 \dots\dots ②$$

ここで

$$A^2 = (x + 2y)^2 = x^2 + 2 \times x \times (2y) + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \dots\dots ③$$

③を②に代入し, A を $x + 2y$ にもどして

$$\begin{aligned} &(x + 2y + 1)^2 \\ &= (A + 1)^2 \\ &= A^2 + 2A + 1 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 2(x + 2y) + 1 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 \end{aligned}$$

2 たすきがけによる展開

まず, $(ax + b)(cx + d)$ を展開してみましょう。

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

この結果を視覚化してみます。

$(ax + b)(cx + d)$ を

$$(ax + b) \Rightarrow a \quad b$$

$$(cx + d) \Rightarrow c \quad d$$

と書きます。ここで左上から右下へ, 左下から右上へかけ算を行います。

これを“たすきがけ”といいます。

かけ算の答えは右に書きましょう。

$$\begin{array}{l} (ax + b) \Rightarrow a \quad b \xrightarrow{\quad} bc \\ (cx + d) \Rightarrow c \quad d \xrightarrow{\quad} ad \end{array}$$

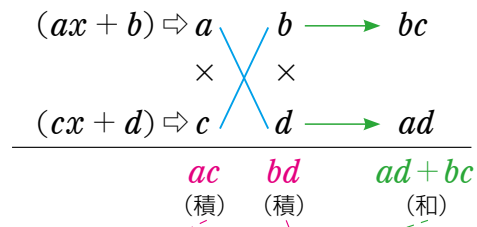
ここで展開式の結果をもう一度見てみましょう。

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

たすきがけした結果が x の係数になっていますね。

そこで、もう一度

$(ax + b)(cx + d)$ の展開を以下のように視覚化します。



$$acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

このように対応させます。

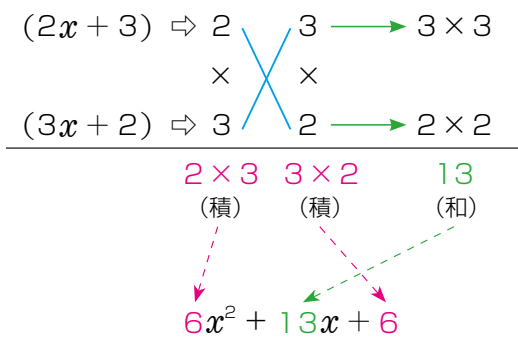
例題

$(2x + 3)(3x + 2)$ を展開しなさい。

【解説】

上の視覚化で展開してみます。

$(2x + 3)(3x + 2)$ の展開を以下のように視覚化します。



つまり、

$$(2x + 3)(3x + 2) = 6x^2 + 13x + 6$$

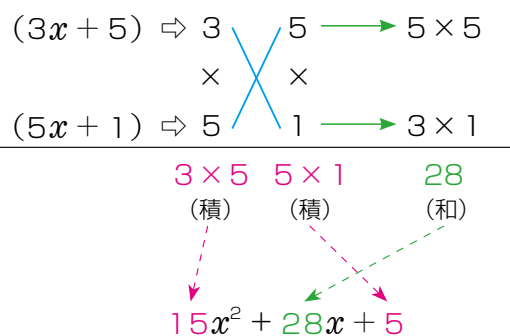
練習問題 2

$(3x + 5)(5x + 1)$ を展開しなさい。

【答え】

上の視覚化で展開してみます。

$(3x + 5)(5x + 1)$ の展開を以下のように視覚化します。



つまり,

$$(3x + 5)(5x + 1) = 15x^2 + 28x + 5$$

Handwriting practice area with horizontal lines.

3 たすきがけによる因数分解

たすきがけを逆から行うことによって、因数分解ができます。

例題

$3x^2 + 7x + 2$ を因数分解しなさい。

【解説】

$(ax + b)(cx + d)$ の展開は以下のように視覚化できました。

$$\begin{array}{rcccl}
 (ax + b) \Rightarrow & a & b & \longrightarrow & bc \\
 & \times & \times & & \\
 (cx + d) \Rightarrow & c & d & \longrightarrow & ad \\
 \hline
 & ac & bd & & ad + bc \\
 & \text{(積)} & \text{(積)} & & \text{(和)} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & 3 & 2 & & 7
 \end{array}$$

まず、 $ac = 3$ と $bd = 2$ を「 1×3 」と「 2×1 」と考えて、たすきがけにします。

すると、 ad と bc の和が 7 になりました。

$$\begin{array}{rcccl}
 1 & 2 & \longrightarrow & 6 \\
 \times & \times & & & \\
 3 & 1 & \longrightarrow & 1 \\
 \hline
 3 & 2 & & 7 \\
 \text{(積)} & \text{(積)} & & \text{(和)}
 \end{array}$$

左側の 2 行を係数とする式を並べて書くと、 $(x + 2)(3x + 1)$ となります。

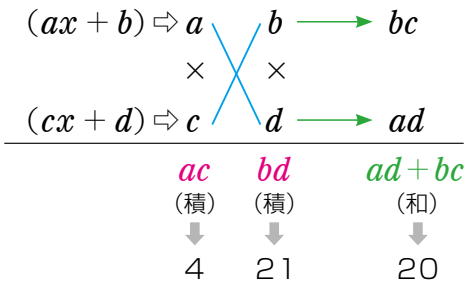
つまり、 $3x^2 + 7x + 2 = (x + 2)(3x + 1)$

練習問題3

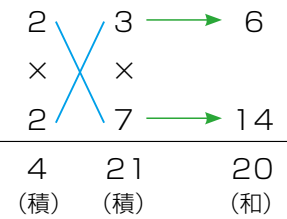
$4x^2 + 20x + 21$ を因数分解しなさい。

【答え】

$(ax + b)(cx + d)$ の展開は以下のように視覚化できました。



まず、 $ac = 4$ と $bd = 21$ を「 2×2 」と「 3×7 」と考えて、たすきがけにします。



2, 3, 2, 7 を $(ax + b)(cx + d)$ の a, b, c, d にあてはめて、

$$4x^2 + 20x + 21 = (2x + 3)(2x + 7)$$

4 因数分解の応用

チャレンジ

$12(x + 3)^2 + 17(x + 3) - 5$ を因数分解しなさい。

【答え】

$12(x + 3)^2 + 17(x + 3) - 5$ において

$x + 3 = A$ とおくと、

$$12(x + 3)^2 + 17(x + 3) - 5 = 12A^2 + 17A - 5$$

となります。

ここで、たすきがけによる因数分解をすると、

3	5	→ 20
×	×	
4	-1	→ -3
12	-5	17
(積)	(積)	(和)

$$12A^2 + 17A - 5 = (3A + 5)(4A - 1)$$

ここで、 $A = x + 3$ ですから、

$$\begin{aligned} 12(x + 3)^2 + 17(x + 3) - 5 &= 12A^2 + 17A - 5 \\ &= (3A + 5)(4A - 1) \\ &= \{3(x + 3) + 5\}\{4(x + 3) - 1\} \\ &= (3x + 9 + 5)(4x + 12 - 1) \\ &= (3x + 14)(4x + 11) \end{aligned}$$



おすすめ番組

☆「高校講座 ベーシック数学」
第 13 回 2次方程式 たすきがけによる因数分解

