

命題と集合 (1)

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

想像してください…、“砂糖は白い”。この文は正しいでしょうか？ 正しい気はしますが…、砂糖といえば白いはず？ でも白くない砂糖もあります。茶色い砂糖とか…。今回学習するのは、その文章がいつも正しいと言えるか言えないのかを判断することです。

学習のポイント

- ① 命題の真偽
- ② 必要条件、十分条件とは
- ③ 命題と集合

ポイント1 命題の真偽

命題という言葉の意味は、正しいか正しくないか、はっきり判断できるものです。

例えば…、

- (1) 10 は 5 で割りきれます。……これは正しいと判断できます。
- (2) 10 は小さい数です。……これは必ずしも正しいとは言えません。

というわけで、(1) は命題ですが、(2) は命題とは言えません。

そして、その命題が正しいことを「真^{しん}」であると言い、正しくないときは「偽^ぎ」であると言います。真偽がはっきりしない命題は、命題とは言えないことは言うまでもありません。

例題 1 次の命題の真偽を述べよ。

- ① $(x - 3)(x - 5) = 0$ の解は $x = 5$ だけである。
- ② 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ の部分集合は 7 個である。



解

- ① 偽……… $(x - 3)(x - 5) = 0$ の解は $x = 3$ と 5 の 2 つがあるから。
- ② 偽……… $\{1\} \{2\} \{3\} \{1, 2\} \{1, 3\} \{2, 3\} \{1, 2, 3\} \{\phi\}$ の 8 個。空集合はすべての集合の部分集合になります。

さて、次は条件のついた命題を考えてみます。

例題 2 次の命題の真偽を述べよ。
 $x = 5$ のとき $(x - 3)(x - 5) = 0$ である。

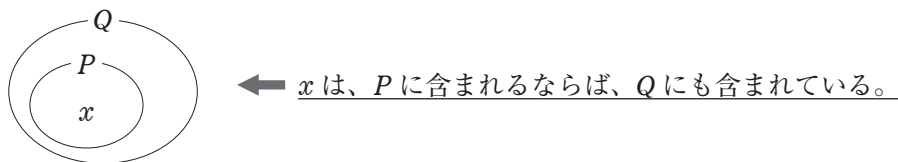
解

真
 $x = 5$ を与式に代入すると成り立ちます。

この命題の“ $x = 5$ のとき”を条件と言います。
 このように、“命題に含まれている文字や式のとる値によって真偽が決まるもの”を条件と言います。

ポイント 2 必要条件、十分条件とは

新しい表現方法を学びます。
 それは…、命題「 p ならば q 」です。これを $p \Rightarrow q$ と表します。
 これはベン図でも表すことができます。条件 p を満たすもの全体の集合を集合 P 、条件 q を満たすもの全体の集合を集合 Q とすると、



と、上図のように表せます。
 簡単に言えば集合 P の要素はすべて集合 Q の要素であるということです。
 身近な話で言えば、「私（湯浅）ならば男」（ちなみに私は男です笑）を考えると、「私は男の集合の中にいる」ということです。つまり集合 Q が男で集合 P が私であるイメージです。
 この集合関係を $P \subset Q$ と表します。

【例題 1】 次の命題の真偽を述べよ

- ① $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
- ② $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

解

- ① 真
- ② 偽 …………… $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ですから $x = 2$ だけではありません。

こんな場合を考えてみましょう。

今からお風呂に入ります。

多くの方々はお風呂には裸で入ると思います。

ということは、お風呂に入るためには、衣服を脱ぐ必要があります。

しかし、衣服を脱いだからといってお風呂に入るとは限りません。

単に着替えのこともあるからです。しかし、お風呂に入るならば裸であると十分に考えられます。

もう 1 つ。

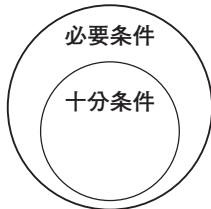
単位を取得するには、テストを受ける必要があります。

しかし、テストを受けたからと言って、単位を取得できるとは限りません。

なぜなら、単位を取得するためには十分に合格できる点を取らなければならないからです。

このように、大きい条件が必要条件、それに含まれる小さい条件が十分条件のイメージです。

すなわち、



となります。

【例題 2】 次の下線部分にあてはまるのは、「十分」と「必要」のどちらか。

- ① $x^2 = 4$ であることは $x = 2$ であるための _____ 条件
- ② $x = 2$ であることは $x^2 = 4$ であるための _____ 条件
