数学Ⅰ

第31回　第３章　三角比

三角比と図形の計量

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

三角比もいよいよ最終回です。今まで学習してきた公式や定理を総動員して空間図形にも使ってみましょう。

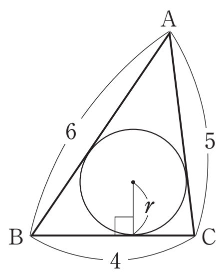
学習のポイント

① 三角形の面積、正弦定理、余弦定理をまとめて使う
② 鈍角の三角形に三角比を使う
③ 空間図形と三角比

ポイント1　三角形の面積、正弦定理、余弦定理をまとめて使う

さあ、今までの公式を確認しながら問題を解いてましょう。

Q



左の△ABCの内接円の半径rの長さを求めなさい。

A：**難しい！**

ですよねぇ～。これを解くには、△ ABC の面積を求めることが必要です。

では、 $\boxed{\text{△ ABC の面積は？}}$　$S = \dfrac{1}{2}bc \times \sin A$

b = AC = 5, c = AB = 6 ですから $\boxed{\sin A \text{ がほしい}}$ 。

でも、△ABCの3辺の長さがわかるときは、余弦定理が使えますから、

$\boxed{\cos A\text{が求められる}}$。ということは、**$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$** を使えば $\sin A$ が求められます。

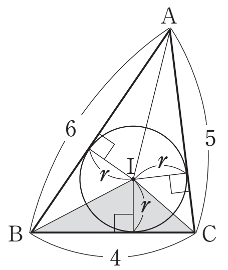
というわけで、

作業は、
①余弦定理から $\cos A$ を求める
② $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ から $\sin A$ を求める
③ $\sin A$ から△ABCの面積を求める
④内接円の半径を求める
です。

この論理思考が大事なのです！！

でもどうして三角形の面積から内接円の半径が求められるのか？

これは次の図を使います。

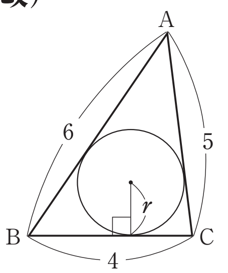


△ABCの内心をIとすると△IBCのBC = 4を底辺とすると高さは、内接円の半径 r になります。

すると、△IBC ＋△ICA ＋△IAB ＝△ABCを使うと r を求められます。

そこで問題を書きかえてみます。

Q（改）



左の△ABCの内接円の半径を r とするとき、次の値を求めなさい。

（1）$\cos A$

（2）$\sin A$

（3）△ABCの面積

（4）r

A

（1）△ABCに余弦定理から、$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos A$

$$60\cos A = 25 + 36 - 16$$
$$= 45$$
$$\cos A = \frac{3}{4}$$

（2） $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$(\sin A)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$

つまり、$(\sin A)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$

$\sin A > 0$ より　$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$

（3） △ABC の面積は、$S = \frac{1}{2}bc \times \sin A$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

（4） △ABC の内心を I とすると面積について、△IBC ＋△ICA ＋△IAB ＝△ABC

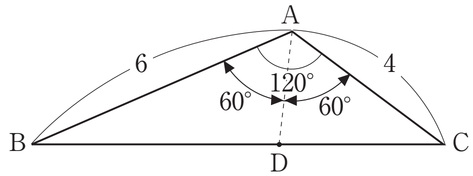
つまり、$\frac{4\times r}{2} + \frac{5\times r}{2} + \frac{6\times r}{2} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

$\frac{15}{2}r = \frac{15}{4}\sqrt{7}$ より、 $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

ポイント2　鈍角の三角形に三角比使う

こんなこともできます。

Q



上の図の△ABC の∠ A の二等分線と BC との交点を D とする AD の長さは？

これも面積を使います。

A

AD の長さを x とすると、△ ABD ＋△ ACD ＝△ ABC より

$$\frac{1}{2}\times 6\times x\times \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times x\times 4\times \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times \sin 120^\circ$$

$\sin 60^\circ=\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですから、

$$\frac{1}{2}\times 6\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times x\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

両辺を $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ でわって整理すると、

$$6x+4x=24$$

$$10x=24$$

$$x=\frac{12}{5}$$

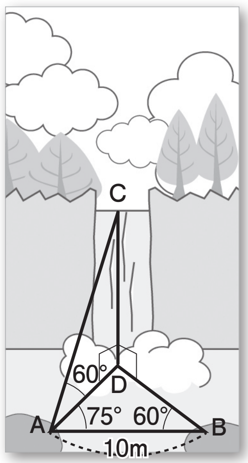
ポイント3　鈍角の三角比を使う

滝の高さを測ろう！

問題

右の図で、点 A，B，D は同一水平面上にあり、$\angle CAD=60^\circ$，$\angle DAB=75^\circ$，$\angle DBA=60^\circ$，AB ＝ 10m である。

(1) $\angle ADB$ を求めなさい。
(2) 距離 AD を求めなさい。
(3) 滝の長さ CD を求めなさい。



答え

(1) $\angle ADB = 180^\circ - (\angle DAB + \angle DBA)$

$= 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ)$

$= 45^\circ$

(2) △ADB に正弦定理から

$$\frac{\mathrm{AD}}{\underset{\uparrow\,\angle DBA}{\sin 60^\circ}} = \frac{10}{\underset{\uparrow\,\angle ADB}{\sin 45^\circ}}$$

$$\mathrm{AD} = \frac{10}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{10}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{6}\ (\mathrm{m})$$

(3) $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}} = \tan 60^\circ$ より

$\mathrm{CD} = \mathrm{AD} \times \tan 60^\circ$

$= 5\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

$= 15\sqrt{2}\ (\mathrm{m})$