数学Ⅰ

第30回　第３章　三角比

三角比と座標

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

三角比を今までは、0°から 90°の角度で考えてきました。今回は 90°を越えた角度を含めて考えます。ここを乗り越えれば三角比も終わりに近づきます。

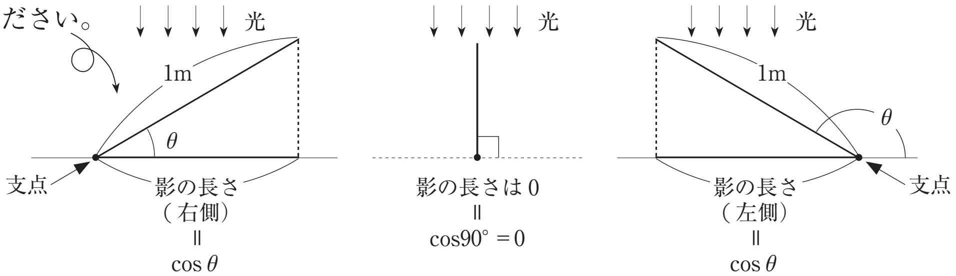
学習のポイント

① 座標の中に三角比をあてはめる
② 鈍角の三角比
③ 鈍角の三角比を使う

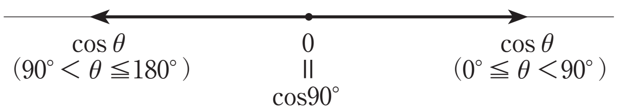
ポイント1　座標の中に三角比をあてはめる

1m の棒に上から光を当てたとき影の長さを cos θ と言いました。

思い出してください。



と言うことは、

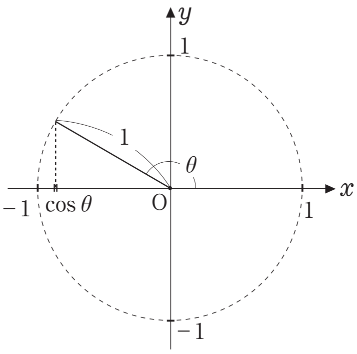


つまり、$0° \leqq \theta < 90°$ のときは、$\cos\theta > 0$

$90° < \theta \leqq 180°$ のときは、$\cos\theta < 0$

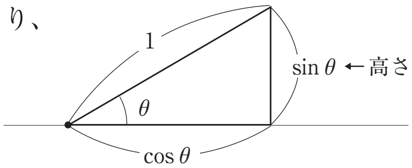
また、$\cos 90° = 0$

これを半径 1 の円で考えると、右図のようになります。

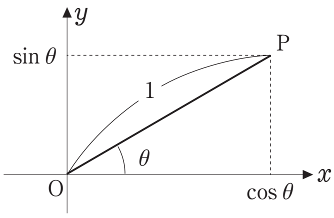


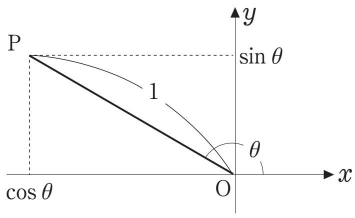
同じように、高さを $\sin\theta$ と考えます。

つまり、

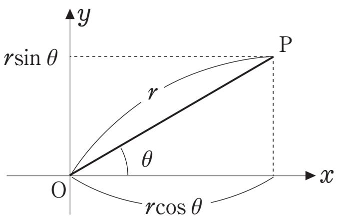


これを拡張すると座標を用いて、OP = 1 のとき　P $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せます。





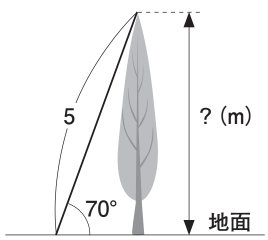
この OP = r ならば、P $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表せます。



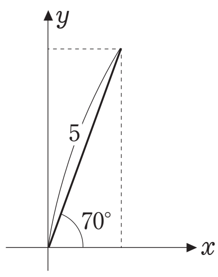
■座標で考えてみよう

Q： 5mのロープを木のてっぺんから地面に投げたところ、地面とロープとのなす角が下図のように70°になりました。この木の高さを求めなさい。

（※三角比の表を使います。第25回、101ページ）



A： これを座標で考えてみましょう。



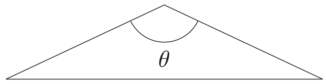
木の高さ　$y = 5\sin 70°$

$\sin 70° = 5 \times 0.9397$ より

$= 4.6985$（m）

ポイント2 鈍角の三角比

鈍角とは、90° を越え 180° 未満の角度を言います。よく鈍角三角形という言葉を耳にします。



この角度は、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ です。

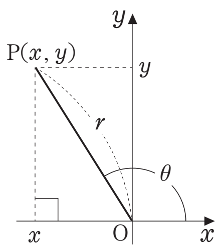
このとき、鈍角 θ の三角比を次のように定めます。

鈍角の三角比

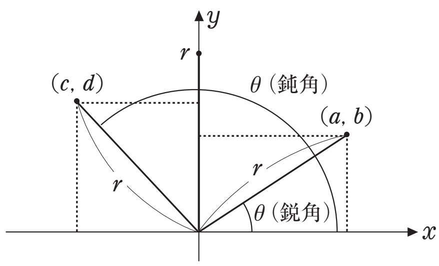
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



数学Ⅰでは、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ を扱いますので下図の場合、次の（1）～（3）のようになります。



（1） θ が鋭角のときは、$(a,\ b)$ を使って、 $\sin\theta = \dfrac{b}{r} > 0$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} > 0$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} > 0$$

(2)　$\theta = 90^\circ$ のときは、$(0,\ r)$ を使って、

$$\sin\theta = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{0}{r} = 0$$

$$\tan\theta = \frac{r}{0}$$ ……分母が 0 なので値なし。

(3)　θ が鈍角のときは $(c,\ d)$ を使って、

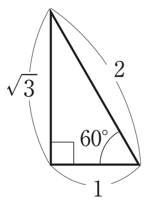
$$\sin\theta = \frac{d}{r} > 0$$

$$\cos\theta = \frac{c}{r} < 0$$

$$\tan\theta = \frac{d}{c} < 0$$

ここに注意！

確認



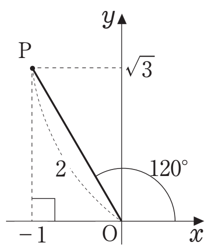
を使うと…

下図のように $\theta = 120^\circ$，OP $= 2$ とすると、
点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ となるから、$r = 2$，$x = -1$，$y = \sqrt{3}$ となります。
よって、

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



ポイント3　鈍角の三角比を使う

実際に問題を解いていきましょう。

問題 1　θ が鈍角のとき $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ ならば、$\cos\theta = ?$

答え

三角比の相互関係より、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ なので、

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

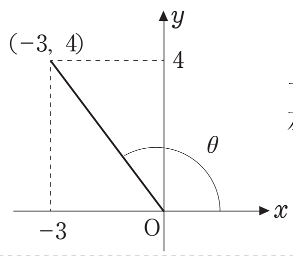
$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

よって、　$\cos\theta = \pm\dfrac{3}{5}$

しかし、θ が鈍角なので $\cos\theta < 0$ より

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

注



上の問題の θ は左図になります。

問題 2　$0 < \theta < 180°$ のとき、$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ ならば、$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

答え

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると、$\underline{\sin^2\theta} + 2\sin\theta \times \cos\theta + \underline{\underline{\cos^2\theta}} = \dfrac{1}{4}$

三角比の相互関係より、$\underline{\underline{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = 1$　なので、

$$1 + 2\sin\theta \times \cos\theta = \frac{1}{4}$$

式を整理して、$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{-3}{8}<0$ より　θ は鈍角とわかる。

ここで、$\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$ を表すと $\begin{cases} y+x=\dfrac{1}{2} \\ yx=\dfrac{-3}{8} \end{cases}$

y を消去して、$\left(\dfrac{1}{2}-x\right)x=\dfrac{-3}{8}$

つまり、$8x^2-4x-3=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\times8\times(-3)}}{2\times8}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$$

$x=\cos\theta<0$　（θ は鈍角）より、

$$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$$=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

三角比の相互関係より、$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{1}{4}(1-\sqrt{7})}$

$$=\frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{8+2\sqrt{7}}{-6}$$

$$=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

まとめ

いろいろな角の三角比を表にまとめると次のようになります。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0