

三角比と座標

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

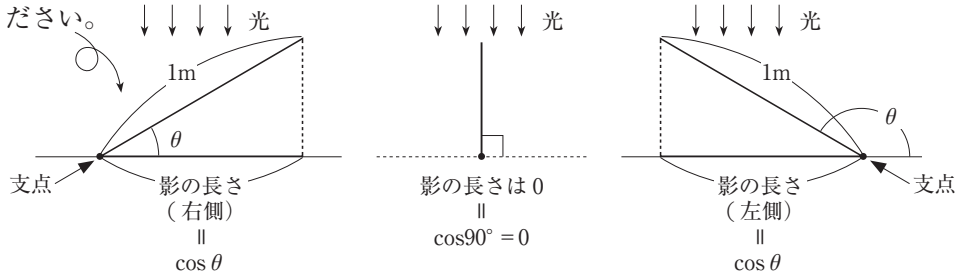
三角比を今までは、 0° から 90° の角度で考えてきました。今回は 90° を越えた角度を含めて考えます。ここを乗り越えれば三角比も終わりに近づきます。

学習のポイント

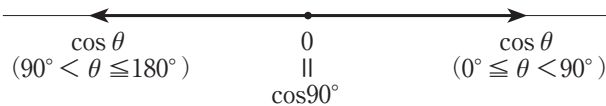
- ① 座標の中に三角比をあてはめる
- ② 鈍角の三角比
- ③ 鈍角の三角比を使う

ポイント1 座標の中に三角比をあてはめる

1m の棒に上から光を当てたとき影の長さを $\cos \theta$ と言いました。思い出してください。



と言うことは、

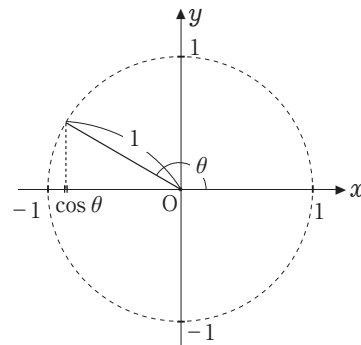


つまり、 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のときは、 $\cos \theta > 0$

$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のときは、 $\cos \theta < 0$

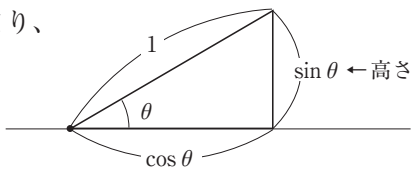
また、 $\cos 90^\circ = 0$

これを半径 1 の円で考えると、右図のようになります。

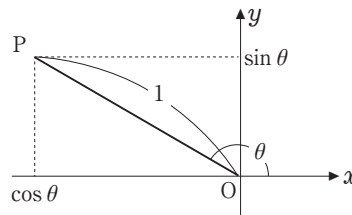
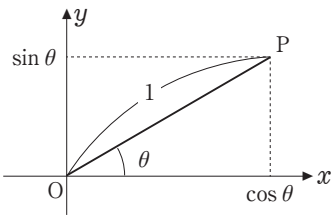


同じように、高さを $\sin \theta$ と考えます。

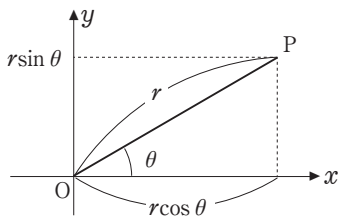
つまり、



これを拡張すると座標を用いて、 $OP = 1$ のとき $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と表せます。

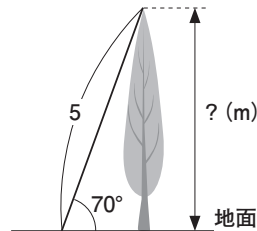


この $OP = r$ ならば、 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表せます。

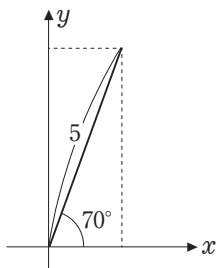


■座標で考えてみよう

Q: 5mのロープを木のとっぺんから地面に投げたところ、地面とロープとのなす角が下図のように 70° になりました。この木の高さを求めなさい。
(※三角比の表を使います。第25回、101ページ)



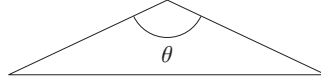
A: これを座標で考えてみましょう。



$$\begin{aligned} \text{木の長さ } y &= 5\sin 70^\circ \\ \sin 70^\circ &= 0.9397 \text{ より} \\ y &= 5 \times 0.9397 \\ &= \underline{\underline{4.6985 \text{ (m)}}} \end{aligned}$$

ポイント2 鈍角の三角比

鈍角とは、 90° を越え 180° 未満の角度を言います。よく鈍角三角形という言葉を目にします。



この角度は、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ です。

このとき、鈍角 θ の三角比を次のように定めます。

● 鈍角の三角比 ●

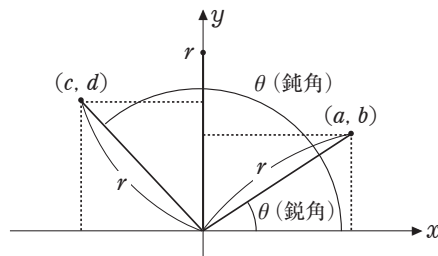
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

A coordinate system with x and y axes. A point P(x, y) is in the second quadrant. A line segment of length r connects the origin O to P. A dashed line from P to the x-axis at x forms a right-angled triangle with hypotenuse r and angle theta measured counter-clockwise from the positive x-axis.

数学 I では、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ を扱いますので下図の場合、次の (1) ~ (3) のようになります。



(1) θ が鋭角のときは、 (a, b) を使って、 $\sin \theta = \frac{b}{r} > 0$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} > 0$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} > 0$$

(2) $\theta = 90^\circ$ のときは、 $(0, r)$ を使って、

$$\sin \theta = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{0}{r} = 0$$

$$\tan \theta = \frac{r}{0} \dots\dots \text{分母が } 0 \text{ なので値なし。}$$

(3) θ が鈍角のときは (c, d) を使って、

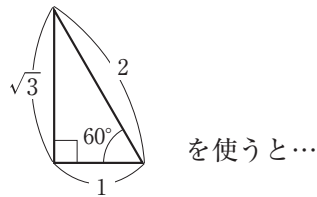
$$\sin \theta = \frac{d}{r} > 0$$

$$\cos \theta = \frac{c}{r} < 0$$

$$\tan \theta = \frac{d}{c} < 0$$

ここに注意!

確認

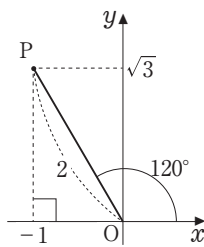


下図のように $\theta = 120^\circ$ ， $OP = 2$ とすると、
 点 P の座標は $(-1, \sqrt{3})$ となるから、 $r = 2$ ， $x = -1$ ， $y = \sqrt{3}$ となります。
 よって、

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



ポイント3 鈍角の三角比を使う

実際に問題を解いていきましょう。

問題 1 θ が鈍角のとき $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ならば、 $\cos \theta = ?$

答え

三角比の相互関係より、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なので、

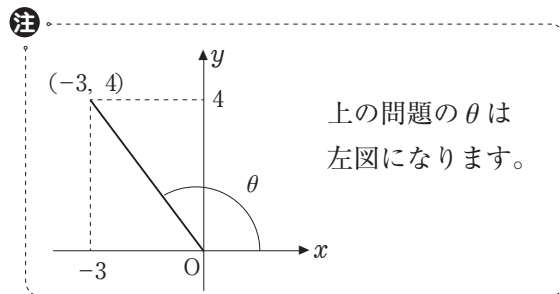
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

よって、 $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$

しかし、 θ が鈍角なので $\cos \theta < 0$ より

$$\cos \theta = \underline{\underline{-\frac{3}{5}}}$$



問題 2 $0 < \theta < 180^\circ$ のとき、 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ならば、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めなさい。

答え

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ の両辺を 2 乗すると、} \underline{\underline{\sin^2 \theta}} + 2 \sin \theta \times \cos \theta + \underline{\underline{\cos^2 \theta}} = \frac{1}{4}$$

三角比の相互関係より、 $\underline{\underline{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = 1$ なので、

$$1 + 2 \sin \theta \times \cos \theta = \frac{1}{4}$$

式を整理して、 $\sin \theta \times \cos \theta = \frac{-3}{8} < 0$ より θ は鈍角とわかる。

ここで、 $\sin \theta = y$, $\cos \theta = x$ を表すと

$$\begin{cases} y + x = \frac{1}{2} \\ yx = \frac{-3}{8} \end{cases}$$

y を消去して、 $\left(\frac{1}{2} - x\right)x = \frac{-3}{8}$

つまり、 $8x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 8 \times (-3)}}{2 \times 8} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$x = \cos \theta < 0$ (θ は鈍角) より、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1 - \sqrt{7}}{4} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2} - \frac{1 - \sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

三角比の相互関係より、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{7})}{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{7})}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 + \sqrt{7})^2}{(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})} \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{7}}{-6} \\ &= -\frac{4 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

まとめ

いろいろな角の三角比を表にまとめると次のようになります。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0