数学 I

第 29 回　第３章　三角比

余弦定理

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

余弦とは、コサインのことでしたね。つまり、△ ABC において、$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ を使う定理です。

学習のポイント

① 余弦定理とは
② 余弦定理の使い方
③ 正弦定理と余弦定理を使い分ける

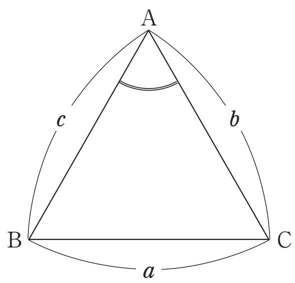
ポイント1 余弦定理とは

まずは定理から、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よく見ると、

$$\underbrace{a^2 = b^2 + c^2}_{\text{三平方の定理があります！！}} - 2bc\cos A$$



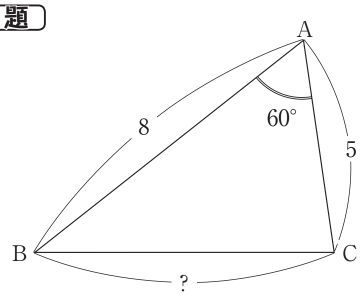
さらによく見ると、

$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{2bc\cos A}_{\text{2 辺をはさむ角のコサインになっています。}}$$

この定理は…

$\boxed{\text{2 辺の長さとそのはさむ角の大きさがわかるとき}}$ に使うことができます。

例題



左の△ABC の AB = 8, AC = 5, ∠BAC = 60° であるとき BC の長さは？

AB=8, AC=5, ∠BAC=60°

↓

2 辺の長さとその**はさむ角**がわかっている！

△ABC において余弦定理から、

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos 60°$

$= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}$

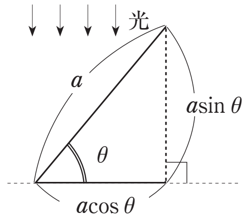
$= 25 + 64 - 40$

$= 49$

BC = ±7　　BC＞0なので

BC = 7

少し難しいですが、余弦定理を証明してみましょう！
そこで思い出してほしいのが…



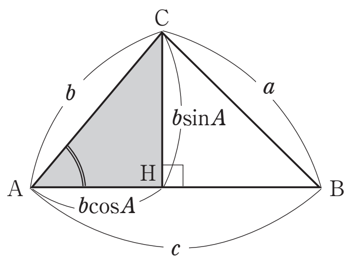
です。

では、早速…

△ABC において C から AB への垂線の足を H とすると

$AH = b\cos A$

$CH = b\sin A$ です。



△CBH に三平方の定理を用いて、

$CB^2 = CH^2 + HB^2$ より

$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　　（$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ です）

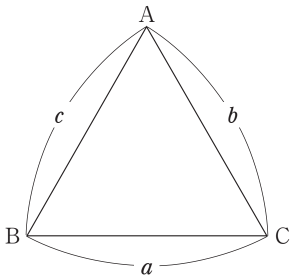
完成です!!

ポイント2　余弦定理の使い方

余弦定理は A、B、C について 1 つずつありますから、

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

の3つがあります。

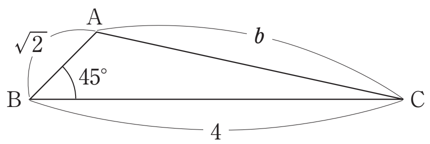


使い方は…

①2 辺の長さと 1 つの角の大きさがわかるとき、
➡　もう 1 辺の長さが求められる。
②3 辺の長さがわかるとき、
➡　角の大きさが求められる。

問題

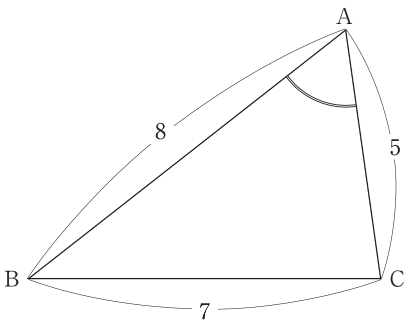
(1)



AB $=\sqrt{2}$，BC $= 4$
$\angle$B $= 45°$ のとき　$b = ?$

問題

(2)



AB $= 8$, BC $= 7$, CA $= 5$ のとき、
$\angle$A の大きさは？

答え

（1）　△ABCにおいて余弦定理から

$$b^2=(\sqrt{2})^2+4^2-2\times\sqrt{2}\times4\times\cos45^\circ$$

$$=2+16-2\times\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=10$$

$b=\pm\sqrt{10}$　　$b>0$なので

$b=\sqrt{10}$

（2）　△ABCにおいて余弦定理から

$$7^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos A$$

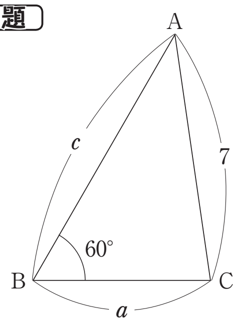
$$80\cos A=64+25-49$$

$$=40$$

$\cos A=\dfrac{1}{2}$　より　$\angle\mathrm{A}=60^\circ$

ポイント3　正弦定理と余弦定理を使い分ける

例題



△ ABC は、AB ＝ c，BC ＝ a

CA ＝ 7 とする

$\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$のとき

（1）　c ＝ ?

（2）　a ＝ ?

答え

（1）　∠B = 60° と対辺の長さ 7 がわかるので、
正弦定理から

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin c}$$

$$c = \frac{7}{\sin 60^\circ} \times \sin C$$

$$= \frac{\cancel{7}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \times \frac{4\sqrt{3}}{\cancel{7}}$$

$$= 8$$

（2）　2 辺と 1 つの角がわかるので、
余弦定理から

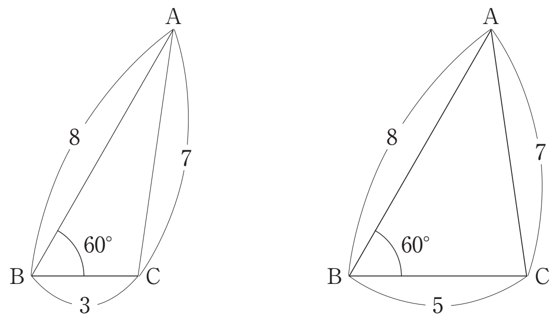
$$7^2 = 8^2 + a^2 - 2 \times 8 \times a \times \cos 60^\circ$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$(a - 3)(a - 5) = 0$$

$$a = 3,\ 5$$

注



の 2 種類があります！