数学Ⅰ

第27回　第３章　三角比

三角形の面積

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

三角形の面積は、「底辺×高さ÷2」です。ここに三角比を導入してみましょう！　すると高さは？　そう、sinθを使います。ここでは記号の約束も増えるので注意しましょう。

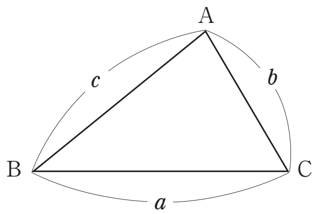
学習のポイント

① 三角比を用いて三角形の面積の公式を導く
② 三角比を用いて三角形の面積を求める
③ 三角形の面積を考える

ポイント1　三角比を用いて三角形の面積の公式を導く

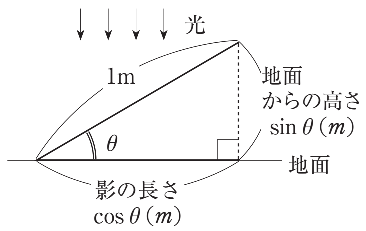
■角と対辺の約束

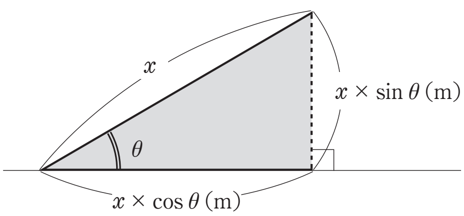
前回までは、直角三角形を主に考えました。今回からは、直角三角形に限らずいろいろな三角形を考えます。このとき、右図のように∠Ａの向かい側の辺の長さを a と表し、∠Ｂの向かい側の辺の長さを b と表し、同様に∠Ｃの向かい側の辺の長さを c と表します。この角と対辺の約束は、今後ずっと適用されますので覚えておきましょう。



■高さの別表現

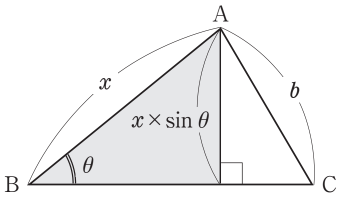
前回出てきた1mの棒の影の長さと地面からの高さのイメージ（右図）を思い出してみましょう。これをx倍に拡大すると、



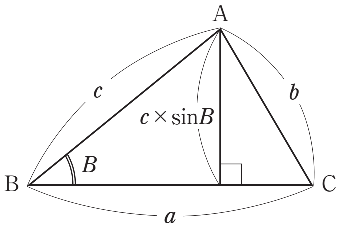


と表すことができます。

これを、一般の三角形に当てはめると $x\sin\theta$ は右図の三角形の高さになります。



次に 角と対辺の約束 を使って考えてみましょう。

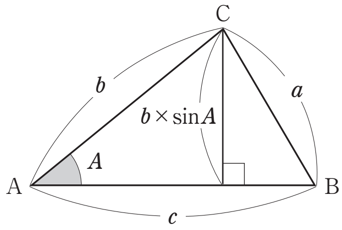


△ ABC の面積を S とすると

$$S = \underbrace{a}_{（底辺）} \times \underbrace{c \times \sin B}_{（高さ）} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}ca\sin B$$ となります。

では、底辺を変えて考えてみましょう。

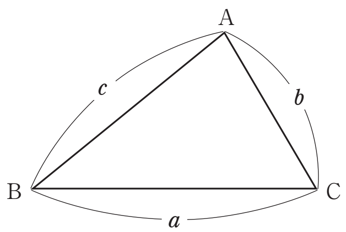


$$S = c \times b \times \sin A \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

ポイント2 三角比を用いて三角形の面積を求める

下図の△ ABC の面積 S は、

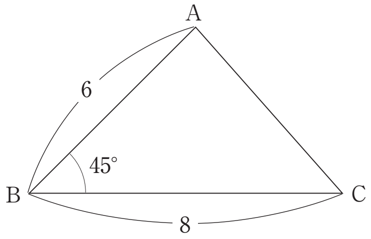


$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}bc\sin A \\ \frac{1}{2}ca\sin B \\ \frac{1}{2}ab\sin C \end{cases}$$

イメージは、2 辺とはさむ角 !!　です。早速使ってみましょう！

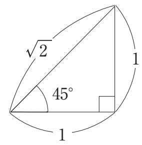
問題

右の△ ABC の面積は？



$$S=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\underline{12\sqrt{2}}$$

参 第 25 回



$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

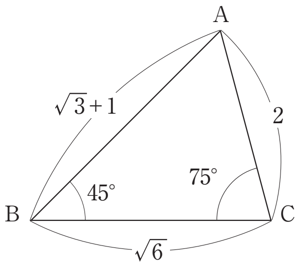
では、もう 1 問！

問題

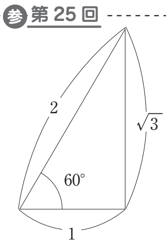
右の△ ABC の面積は？

∠ A ＝ 180° −（45° ＋ 75° ）＝ 60° ですから、

$$S=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times 2\times \sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\underline{\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})}$$

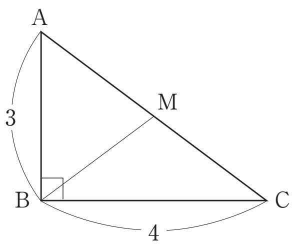


参 第 25 回



$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ポイント3　三角形の面積を考える

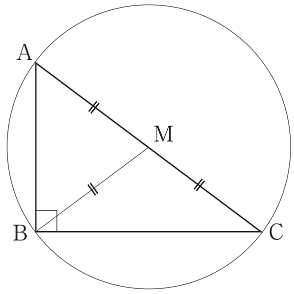


左の△ ABC の面積は、$\frac{4\times 3}{2}=6$ です。

辺 AC 上の点を M とすると、この△ ABC の面積が線分 MB によって 2 等分されるとき、∠ MBC はおよそ何度でしょう？

※三角比の表（第 25 回、101 ページ）を用いても OK。

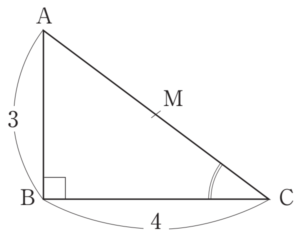
考え方は、いろいろありますが…、



例えば…

$\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ ですから AC は、△ ABC の外接円の直径です。
さらに、△ ABC の面積が 2 等分されるので、M は AC の中点です。
つまり、MA = MC = MB なので、
△ MBC は二等辺三角形です。
よって、$\angle \mathrm{MBC} = \angle \mathrm{MCB}$

ということは、$\angle \mathrm{MCB} = \angle \mathrm{ACB}$　つまり $\angle \mathrm{C}$ を求めます。



このとき、$\tan C = \dfrac{3}{4} = 0.75$

この値に近い $\angle \mathrm{C}$ を三角比の表から探すと…
$\tan 37^\circ = 0.7536$ ですから、およそ 37° です。
よって、$\angle \mathrm{MBC} \fallingdotseq 37^\circ$　となります。