

2 次関数のグラフと 2 次不等式 (2)

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

2 次不等式をグラフを使って考えてみましょう。2 次関数と x 軸との共有点は、右下の図 1 に示す 3 通りだけです。今回は、グラフと x 軸の共有点が 1 つの場合、共有点がない場合を考えます。

学習のポイント

- ① 重解をもつ 2 次不等式
- ② x 軸と共有点のない 2 次関数
- ③ 2 次不等式を用いる文章題

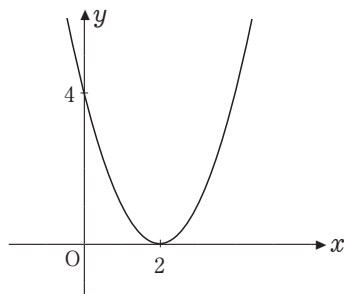
ポイント 1 重解をもつ 2 次不等式

具体的に問題を解きながら考えていきましょう。

◀ **例題 1** 次の 2 次不等式を解きなさい。

- (1) $x^2 - 4x + 4 > 0$
- (2) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
- (3) $x^2 - 4x + 4 < 0$
- (4) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

答え

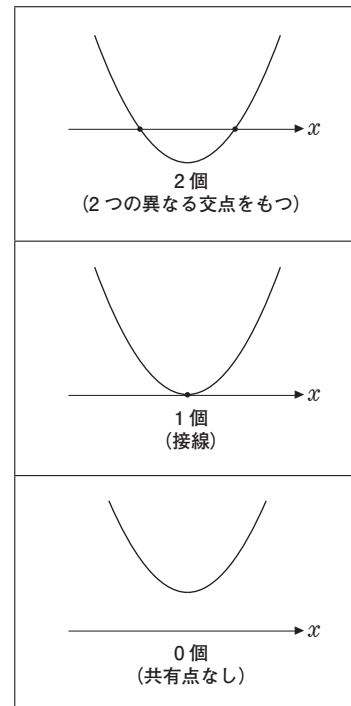


まず、 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフを考えてみましょう。

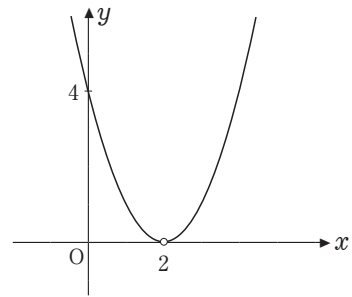
$y = (x - 2)^2$ と平方完成できます。

左がそのグラフです。

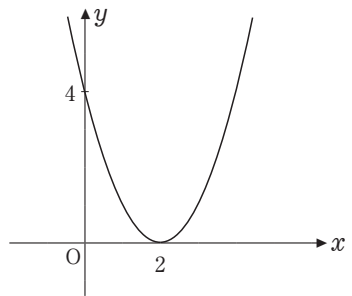
図 1



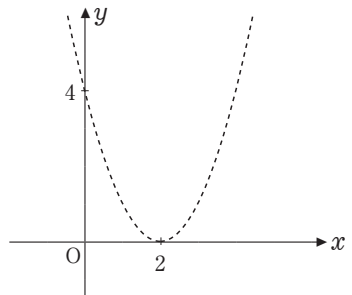
- (1) $y = x^2 - 4x + 4 > 0$ と考えて、 $y > 0$ のところだから、
解は、 $x \neq 2$ のすべての実数 です。



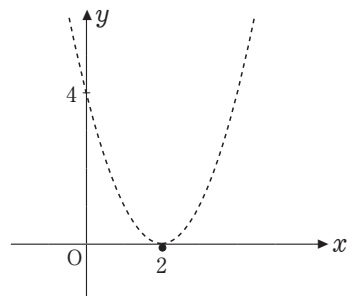
- (2) $y = x^2 - 4x + 4 \geq 0$ と考えて、 $y \geq 0$ のところだから、
グラフのすべてが含まれます。
どの x の値でも $y = (x - 2)^2 \geq 0$ は常に成り立つから、
 $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ の解は、すべての実数 となります。



- (3) $y = x^2 - 4x + 4 < 0$ と考えて、 $y < 0$ の範囲には、
 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフは全く存在しません。
これを 解なし と言います。



- (4) $y = x^2 - 4x + 4 \leq 0$ と考えて、 $y \leq 0$ のところだから、
 $y = (x - 2)^2 \leq 0$ を満たすのは、 $x = 2$ しかありません！
解は、 $x = 2$ となります。



このように、不等式なのに方程式の解のような答の場合も
あります。

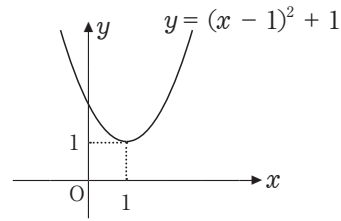
ポイント2 x 軸と共有点のない2次関数

$x^2 - 2x + 2 > 0$ を解いてみましょう。

$y = x^2 - 2x + 2 > 0$ と考えて、

$y = (x - 1)^2 + 1 > 0$

右図のグラフから、 $y > 0$ となる x はすべての値、つまりこの不等式の解は、すべての実数 となります。



では、もう1題!

$x^2 - 2x + 2 < 0$ を解くと、 $y = (x - 1)^2 + 1 < 0$ と考えて、 $y < 0$ の範囲にグラフは存在しません。(上記グラフ参照)

したがって、解なし となります。

ポイント3 2次不等式を用いる文章題

問題 1個100円で仕入れた品物を120円で売るとき600個売れる品物を、1個につき1円値上げするごとに売れる個数が20個減ります。利益が12000円以上になるのは1個いくらかからいくらの範囲で売るときでしょう？

答え

120円を基準にして売れる個数が変化するので、120円より x 円値上げしたときを考えます。

このとき売れる個数は、 $600 - 20x$ (個)、利益は、1個につき $120 + x - 100 = 20 + x$ (円) なので、全体の利益は、 $(20 + x) \times (600 - 20x)$ 。

これが12000円以上なので、 $(20 + x)(600 - 20x) \geq 12000$

これを展開して整理すると $200x - 20x^2 \geq 0$

両辺を -20 でわって $x^2 - 10x \leq 0$

$$x(x - 10) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 10$$

したがって、販売価格は $120 + x$ 円なので、 $120 \leq 120 + x \leq 130$

つまり、120円から130円で 売ればよい。

