

2次関数のグラフと2次不等式 (1)

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

不等式をグラフにする？ できるでしょうか？ できるのです。視覚化しながら、1次不等式から始めます。そして、2次不等式へ。等号が入るか入らないかに気をつけましょう。

学習のポイント

- ① 不等式とグラフの関係
- ② グラフと因数分解を使って不等式を解く
- ③ グラフと2次方程式の解の公式を使って不等式を解く

不等式とグラフの関係

まず、1次方程式を考えましょう。

$$\begin{array}{ll}
 2x - 4 \geq 0 & \text{を解きます。} \\
 2x - 4 \geq 0 & \text{項に区切って} \\
 2x \geq 4 & \text{定数項を右辺に移動して} \\
 \underline{x \geq 2} & \text{xの係数2でわります。}
 \end{array}$$

では、この $2x - 4 \geq 0$ をグラフで考えてみましょう。

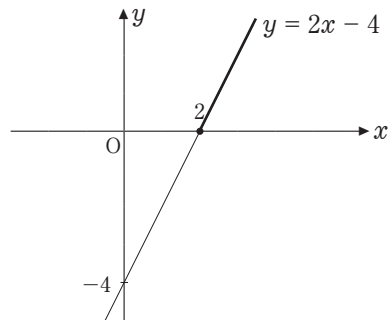
1次関数 $y = 2x - 4 \geq 0$ と書いてみます。

これは、 $y = 2x - 4$ と $y \geq 0$ です。

つまり、直線 $y = 2x - 4$ 上の $y \geq 0$ の部分です。

グラフに表したのが右図です。

$y \geq 0$ なので、 x 軸を含めて上の太線の部分です。



同じことを2次関数で考えてみましょう。

《その前に準備!》

x の2次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ のグラフを書いてみます。

平方完成で今まで書いてきましたが、右辺が因数分解できるので因数分解をすると、

$$y = x^2 - 6x + 8$$

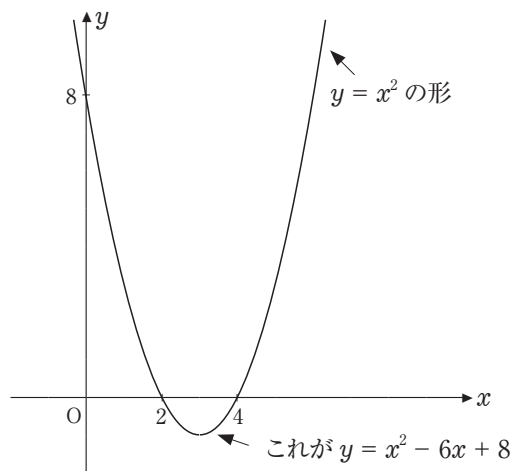
$$= (x - 2)(x - 4) \text{ となります。}$$

$y = x^2 - 6x + 8$ のグラフは、 $y = x^2$ と同じ形です。

さらに、 $y = (x - 2)(x - 4)$ から、 $(2, 0)(4, 0)$ を通ります。

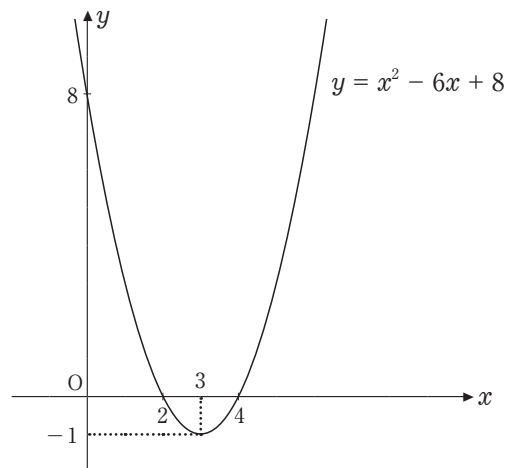
$(2, 0)(4, 0)$ は、 x 軸上の点です。

したがって、



頂点は、 x 軸の交点2と4のまん中の $x = 3$ のときですから $(3, -1)$ となります。

因数分解のできる2次関数は、平方完成をしなくてもグラフが書けます。



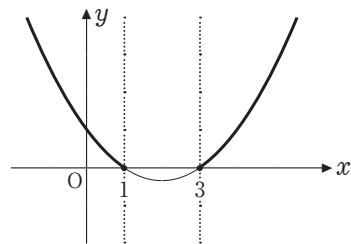
グラフと因数分解を使って不等式を解く

$(x - 1)(x - 3) \geq 0$ を考えてみましょう。

$$\underline{y = (x - 1)(x - 3) \geq 0}$$

x の2次関数 $\begin{cases} y = (x - 1)(x - 3) \\ \underline{y = 0} \text{ (} x \text{軸)} \end{cases}$ を考えます。

$\underline{y = (x - 1)(x - 3) \geq 0}$ は、
2次関数



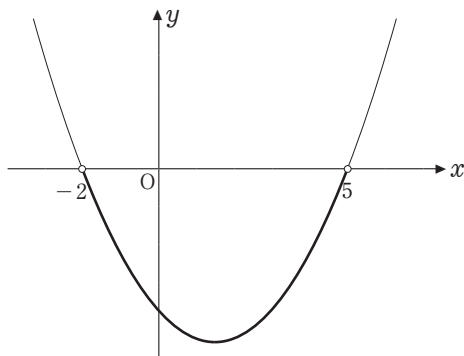
$\underline{x \leq 1}$ または、 $\underline{3 \leq x}$ になります。

では、もう1題!

$x^2 - 3x - 10 < 0$ を考えてみましょう。

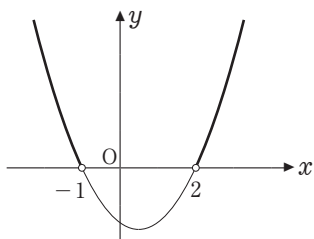
左辺を因数分解すると $(x - 5)(x + 2) < 0$

$\underline{y = (x - 5)(x + 2) < 0}$ は、 $y < 0$ の部分ですから、 $\underline{-2 < x < 5}$ になります。



グラフと二次方程式の解の公式を使って不等式を解く

例えば、 $x^2 - x - 2 > 0$ を解くと、左辺は因数分解できるので、 $y = (x - 2)(x + 1) > 0$ と考えて

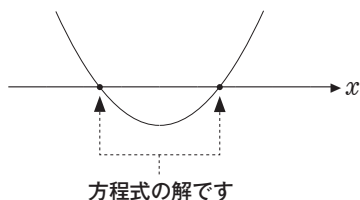


$x < -1$ または、 $2 < x$ と求められます。

しかし、 $x^2 - x - 1 > 0$ を解くとこの左辺は因数分解できません。
このときは、第 16 回で学習した **解の公式 !!** を使います。

解の公式	$ax^2 + bx + c = 0$ のとき
	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^2 - x - 1 = 0$ の解は $\begin{cases} y = x^2 - x - 1 \\ y = 0 \text{ (} x \text{ 軸)} \end{cases}$ との交点の x 座標でした。

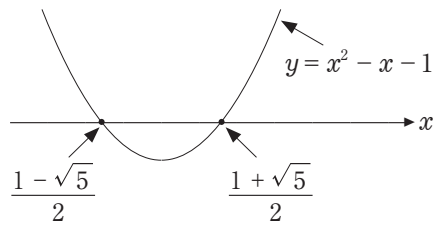


$x^2 - x - 1 = 0$ を解の公式で解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

つまり、



よって、 $x^2 - x - 1 > 0$ を解くと右図のグラフの x 軸より上の部分ですから、

$x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x$ となります。

