数学Ⅰ

第21回　第２章　２次関数

２次関数のグラフと２次方程式

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

方程式をグラフでビジュアル化してみましょう。グラフで把握する習慣を持つことで今後、不等式もビジュアル化できます。ある意味、方程式を体感するのが目的です。

学習のポイント

① **グラフ上の方程式の解とは**
② **２次方程式の解の個数とグラフの共有点の関係**
③ **２次関数が x 軸に接することと解の個数**

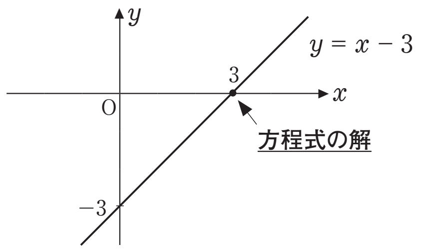
グラフ上の方程式の解とは

方程式をグラフでイメージしてみましょう。

x の１次方程式、
$x-3=0$ を解くと　$x=3$

この $x-3=0$ を $\begin{cases} y=x-3 & \text{（直線）と} \\ y=0 & \text{（}x\text{ 軸）} \end{cases}$ を連立したと考えると

方程式の解は、 $\begin{cases} y=x-3 & \text{（直線）と} \\ y=0 & \text{（}x\text{ 軸）} \end{cases}$ の**共有点の x 座標になる**。



これを2次方程式で考えると

$x^2 + 2x - 3 = 0$　を解くと因数分解して、

$(x - 1)(x + 3) = 0$

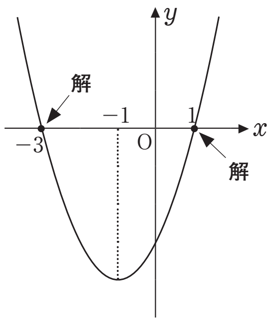
$x = 1,\ -3$

2次方程式　$x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は、

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 & (2\text{次関数}) \\ y = 0 & (x\text{軸}) \end{cases}$$

の**共有点の x 座標**と考えて、

$x = -3$ または $x = 1$　となります。



2次方程式の解の個数とグラフの共有点の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$　$(a \neq 0)$ をグラフで考えてみましょう。

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & (2\text{次関数}) \\ y = 0 & (x\text{軸}) \end{cases}$$

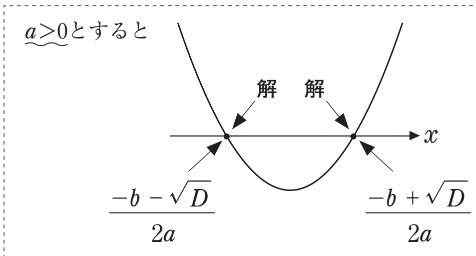
の**共有点の x 座標**と考えて、

$ax^2 + bx + c = 0$ を解の公式を用いて、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

複雑な$\sqrt{\ }$の中を D とおいてみましょう！

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$



そうすると、$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ と表すことができます。

2次関数と x 軸との共有点が $ax^2 + bx + c = 0$ の解になります。

例えば、

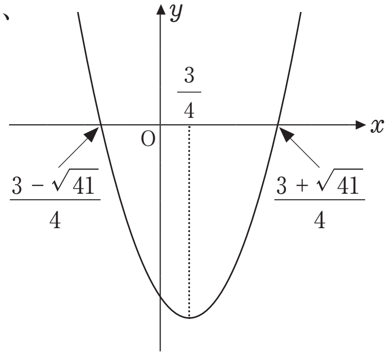
$2x^2-3x-4=0$ を考えると、解の公式を用いて、

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}$$

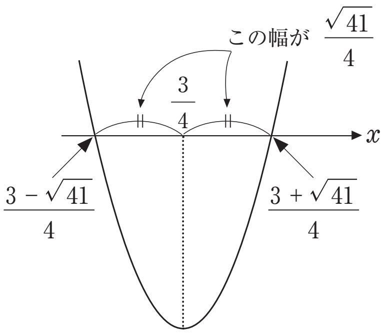
$$=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$$

グラフを使うと $\begin{cases} y=2x^2-3x-4 \\ y=0 \end{cases}$ の共有点を考えて、

右図のようになります。



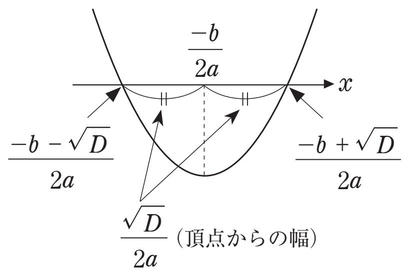
ちなみに、



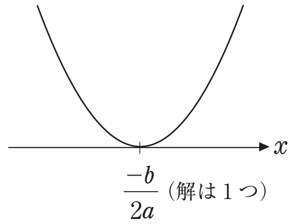
左図のように、$x=\dfrac{3}{4}$ を軸として左右が等しくなります。

２次関数が x 軸に接することと解の個数

$ax^2+bx+c=0$ をグラフで考えたとき、右図のグラフとなります。



ここでグラフを上へ移動して（右図）みましょう。

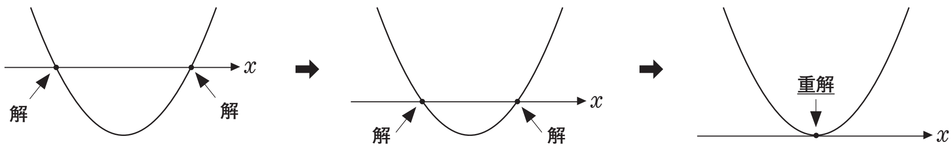


幅 $\dfrac{\sqrt{D}}{2a} = 0$

つまり、$\sqrt{D} = 0$

$\sqrt{\ }$ の中の $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ のとき解は１つになります。

イメージ

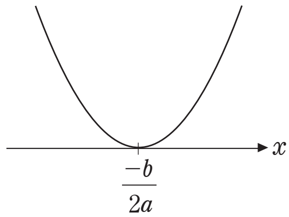


つまり、$ax^2 + bx + c = 0$　$(a \neq 0)$ の $D = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ のとき、この２次方程式は１つだけ解を持ちます。

２つの解が重なったので、重解 $x = \dfrac{-b}{2a}$ となります。

このときの $y = ax^2 + bx + c$ は、

x 軸と接していて接点は、$\left(\dfrac{-b}{2a},\ 0\right)$ です。



まとめ

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **（**$\boldsymbol{a \neq 0}$**）の** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ **とすると**

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

$\boldsymbol{D > 0}$**：異なる２つの（実数）解を持つ**

$\boldsymbol{D = 0}$**：重解を持つ（実質の解は１つ）**

$\boldsymbol{D < 0}$**：解なし**

問題

次の２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1)　$y = x^2 - 3x - 10$

(2)　$y = x^2 - 4x + 4$

(3)　$y = 2x^2 - 5x + 5$

解

x 軸は、$y = 0$ なのでそれぞれの式を連立します。

(1)　$x^2 - 3x - 10 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0$ より

共有点は、２個

(2)　$x^2 - 4x + 4 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ より

共有点は、１個

(3)　$2x^2 - 5x + 5 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -15 < 0$ より

共有点は、ない