数学Ⅰ

第20回　第２章　２次関数

２次関数の最大値・最小値

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

２次関数の最大値と最小値を確認します。x の範囲のことを定義域、y の範囲を値域といいます。これらを１次関数から学び、２次関数へと広げていきます。関数すべてにおいて、最大値と最小値が存在するとは限りませんので気をつけてください。

学習のポイント

① 定義域とは
② ２次関数の最大値、最小値とは
③ 定義域のある最大値と最小値

ポイント1 定義域とは

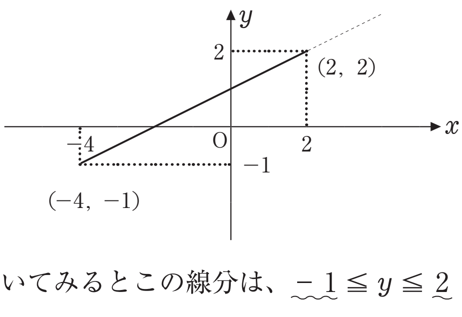
y が x の関数であるとき、x のとる値の範囲をその関数の **定義域** と言います。

例えば、$y=\frac{1}{2}x+1$ において

$-4 \leqq x \leqq 2$ のとき　□$\leqq y \leqq$□　を考えてみましょう。

この、$-4 \leqq x \leqq 2$ を、$y=\frac{1}{2}x+1$ の定義域と言います。

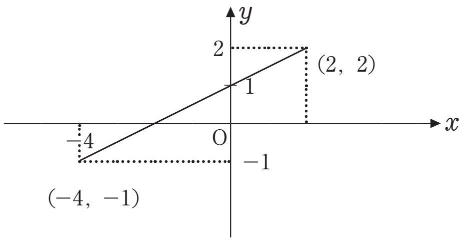
これをグラフにすると



ここで y についてみるとこの線分は、$-1 \leqq y \leqq 2$ となります。

ポイント2　2次関数の最大値、最小値とは

ポイント1の $y=\dfrac{1}{2}x+1$　$(-4 \leqq x \leqq 2)$　　の y は、$-1 \leqq y \leqq 2$　でした。



この　$y=2$　を $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の**最大値**

$y=-1$ を $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の**最小値**と言います。

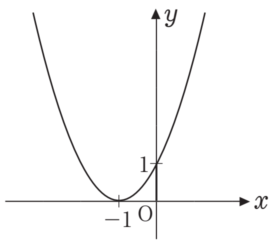
つまり、y 軸方向に対して、一番上に位置している点が y の最大値で、一番下に位置している点が y の最小値です。

では、これを2次関数で考えてみましょう。

練習①

$y=x^2+2x+1$　の最大値と最小値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
y &= x^2+2x+1 \\
&= (x+1)^2
\end{aligned}
$$



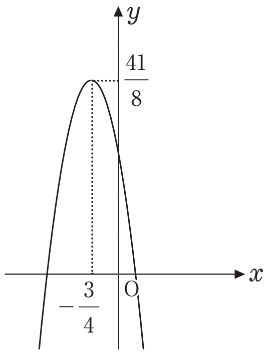
$x=-1$ のとき最小値 0

最大値はない　　となります。

練習②

$y = -2x^2 - 3x + 4$　の最大値と最小値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 - 3x + 4 \\
&= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 4 \\
&= -2\left\{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right\} + 4 \\
&= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + 4 \\
&= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{41}{8}
\end{aligned}
$$



$x = -\dfrac{3}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{41}{8}$

最小値はない

ポイント3　定義域のある最大値と最小値

では、実際に問題を解いていきましょう。

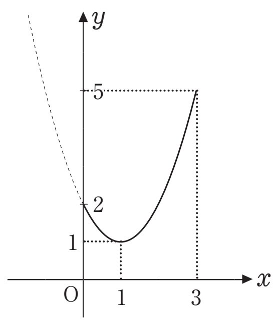
例題1

$y = x^2 - 2x + 2$　$(0 \leqq x \leqq 3)$　の最大値と最小値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2x + 2 \\
&= (x - 1)^2 + 1
\end{aligned}
$$

まず平方完成

この頂点は (1, 1)



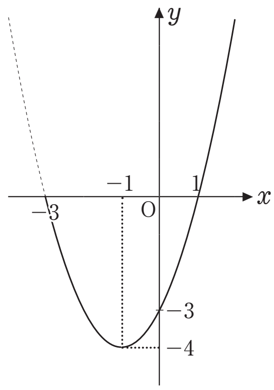
$x = 3$ のとき、最大値（$y =$）5

$x = 1$ のとき、最小値（$y =$）1

例題２

$y = x^2 + 2x - 3\ \ (-3 \leqq x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$y = x^2 + 2x - 3$　平方完成
$\quad = (x+1)^2 - 4$

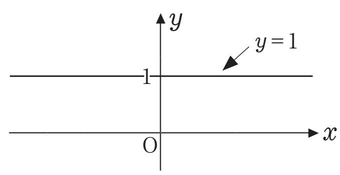


y はいくらでも大きな値をとれるので、
　最大値はない

$x = -1$ のとき　最小値は -4

番組よりちょっと難しい話！

右のグラフ $y = 1$ は、x 軸に平行な直線です。
この関数の最大値と最小値はなんでしょうか？



この直線上で最も大きい値は？　1
　最も小さい値は？　1
つまり、最大値も最小値も１なんです。