

## 2 次関数と 2 次関数のグラフ (2)

監修・執筆  
 湯浅弘一

### 今回学ぶこと

数学 I の中でも難しい項目です。2 次式を平方完成と呼ばれる形に変形できることが今回、最大の目標です。手順をキチンと覚えて身につけましょう。

### 学習のポイント

- ① 平方完成とは
- ②  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ
- ③  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ

### ポイント1 平方完成とは

#### ■準備&おさらい

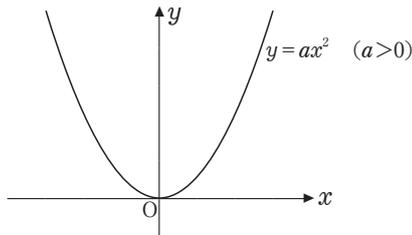
$y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) を  $x$  の 2 次関数と言います。

これを関数 (function) の頭文字を使って、

$y = f(x)$  と表すことにします。

つまり、 $f(x) = ax^2 + bx + c$  です。

さて、下図は  $y = ax^2$  のグラフです。



この  $y = ax^2$  を  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  平行移動したグラフは、

$x$  の代わりに、 $x - p$

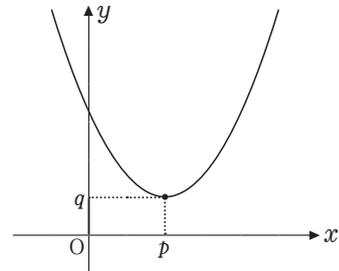
$y$  の代わりに、 $y - q$  を  $y = ax^2$  に代入して、

$$y - q = a(x - p)^2$$

となります。 $-q$ を右辺に移項して、

$$\underline{y = a(x - p)^2 + q} \quad \text{⊗}$$

これをグラフにかくと右のようになります。頂点は  $(p, q)$  です。  
 $y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - p)^2 + q$  この変形を行うことを **平方完成** と言います。



■平方完成の手順の準備

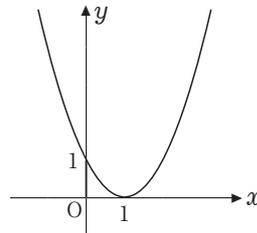
準備：因数分解の公式  $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{cases}$  を使います。

$$y = x^2 - 2x + 1$$

因数分解の公式により

$$y = (x - 1)^2$$

⊗より、 $y = (x - 1)^2 + 0$   
 頂点は  $(1, 0)$



$y = x^2 + 2x + 3$  のグラフは

前の2つの項を平方完成する

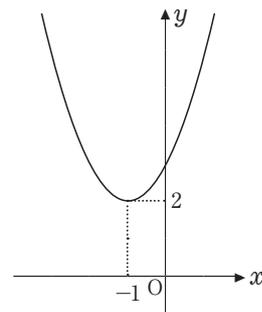
$$y = (x + 1)^2 - 1^2 + 3$$

$$= (x + 1)^2 + 2$$

注： $x^2 + 2ax$  は  $(x + a)^2 - a^2$  (うしろ)<sup>2</sup>をひく！

⊗より、頂点は  $(-1, 2)$

**ポイント：** $x^2 + 2x$  の1次の係数の半分を使って平方完成。  
 つまり、 $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$   
 2の半分



■平方完成の手順

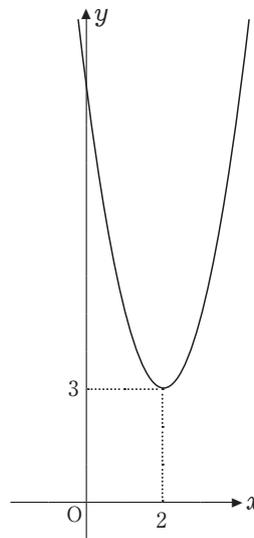
- STEP 1  $x^2$  の係数で  $x^2$  と  $x$  の項をくくる。
- STEP 2 STEP 1 の後にできる  $x$  の係数の半分を使って平方完成をする。
- STEP 3  $y = a(x - p)^2 + q$  の形に整える。

$y = 2x^2 - 8x + 11$  の頂点は……、

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 11 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 11 \\ &= 2\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 11 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 11 \\ &= 2(x - 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

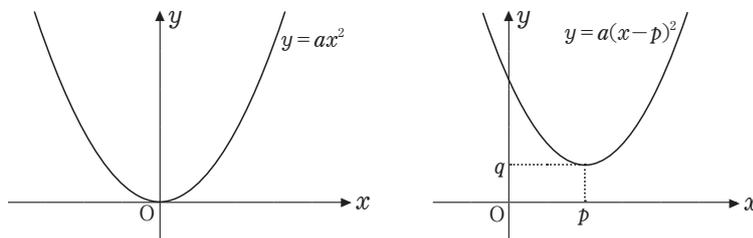
$x^2$  の係数で  $x^2$  と  $x$  の項をくくる (STEP 1)  
( ) 内を平方完成する

頂点 (2, 3)



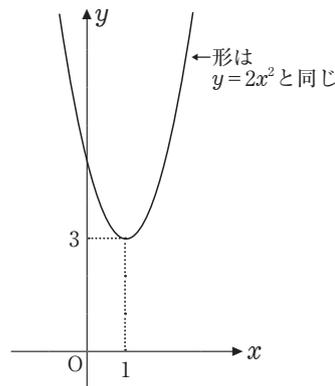
ポイント2  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ

※より、 $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフの頂点は、 $(p, q)$  です。形は、 $y = ax^2$  と同じです。



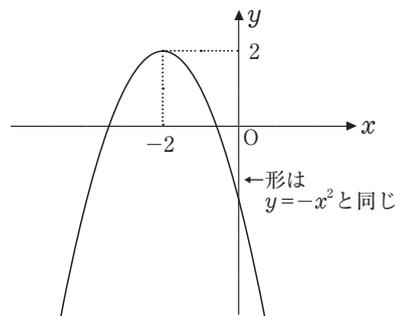
例1 :

$y = 2(x - 1)^2 + 3$  のグラフは、



例2 :

$y = -(x + 2)^2 + 2$  のグラフは、



**ポイント3**  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ

早速、平方完成の出番です。  $y = 2x^2 - 3x + 4$  のグラフは？

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 3x + 4 \\
 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4 && \left( \text{STEP 1} \right) \\
 &\quad \downarrow \quad \text{半分} \\
 &= 2\left\{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} + 4 && \left( \text{STEP 2} \right) \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 4 \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}
 \end{aligned}$$

頂点は、 $\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$  形は、 $y = 2x^2$  と同じ

