

2次関数と2次関数のグラフ (2)

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

数学Iの中でも難しい項目です。2次式を平方完成と呼ばれる形に変形できることが今回、最大の目標です。手順をキチンと覚えて身につけましょう。

学習のポイント

- ① 平方完成とは
- ② $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ
- ③ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

ポイント1 平方完成とは

■準備&おさらい

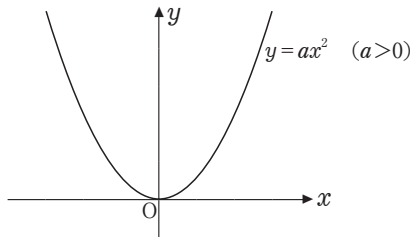
$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) を x の2次関数と言います。

これを関数 (function) の頭文字を使って、

$y = f(x)$ と表すことにします。

つまり、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ です。

さて、下図は $y = ax^2$ のグラフです。



この $y = ax^2$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q 平行移動したグラフは、

x の代わりに、 $x - p$

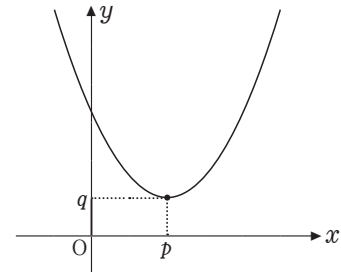
y の代わりに、 $y - q$ を $y = ax^2$ に代入して、

$$y - q = a(x - p)^2$$

となります。 $-q$ を右辺に移項して、

$$\underline{y = a(x - p)^2 + q} \quad \text{⊗}$$

これをグラフにかくと右のようになります。頂点は (p, q) です。
 $y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - p)^2 + q$ この変形を行うことを **平方完成** と言います。



■平方完成の手順の準備

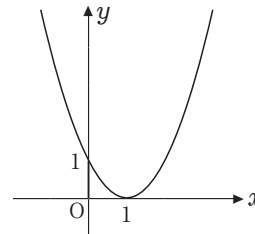
準備：因数分解の公式 $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{cases}$ を使います。

$$y = x^2 - 2x + 1$$

因数分解の公式により

$$y = (x - 1)^2$$

⊗より、 $y = (x - 1)^2 + 0$
 頂点は $(1, 0)$



$$y = x^2 + 2x + 3 \text{ のグラフは}$$

前の2つの項を平方完成する

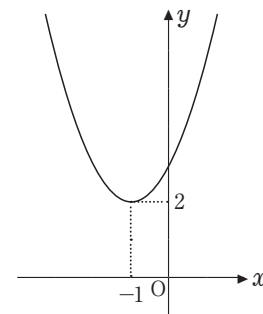
$$y = (x + 1)^2 - 1^2 + 3$$

$$= (x + 1)^2 + 2$$

注： $x^2 + 2ax$ は $(x + a)^2 - a^2$ (うしろ)²をひく！

⊗より、頂点は $(-1, 2)$

ポイント： $x^2 + 2x$ の1次の係数の半分を使って平方完成。
 つまり、 $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$
 2の半分



■平方完成の手順

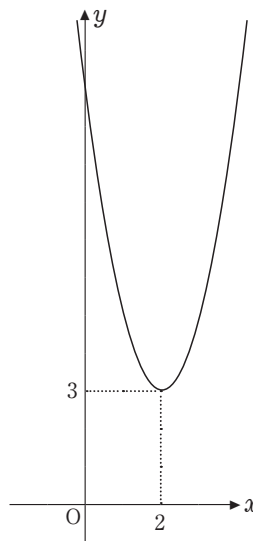
- STEP 1 x^2 の係数で x^2 と x の項をくくる。
- STEP 2 STEP 1 の後にできる x の係数の半分を使って平方完成をする。
- STEP 3 $y = a(x - p)^2 + q$ の形に整える。

$y = 2x^2 - 8x + 11$ の頂点は……、

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 11 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 11 \\ &= 2\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 11 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 11 \\ &= 2(x - 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

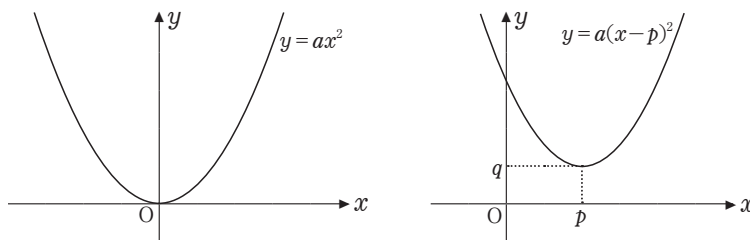
x^2 の係数で x^2 と x の項をくくる (STEP 1)
() 内を平方完成する

頂点 (2, 3)



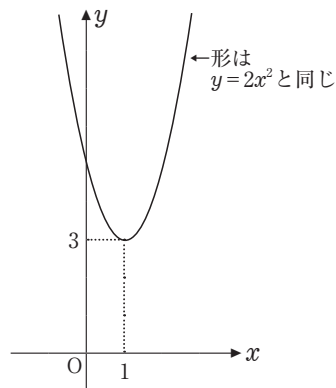
ポイント2 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

※より、 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの頂点は、 (p, q) です。形は、 $y = ax^2$ と同じです。



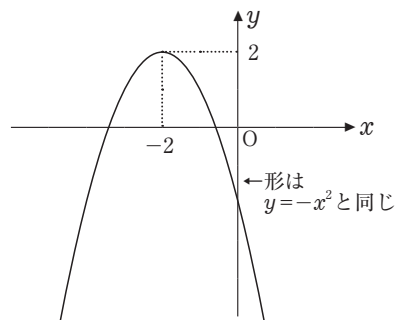
例1 :

$y = 2(x - 1)^2 + 3$ のグラフは、



例2 :

$y = -(x + 2)^2 + 2$ のグラフは、



ポイント3 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

早速、平方完成の出番です。 $y = 2x^2 - 3x + 4$ のグラフは？

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 3x + 4 \\
 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4 && \left(\text{STEP 1} \right) \\
 &\quad \downarrow \quad \text{半分} \\
 &= 2\left\{ \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\} + 4 && \left(\text{STEP 2} \right) \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 4 \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}
 \end{aligned}$$

頂点は、 $\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$ 形は、 $y = 2x^2$ と同じ

