

## 分母の有理化

監修・執筆

湯浅弘一

### 今回学ぶこと

有理化することとは、無理数から有理数を作ることです。特に分数の場合、分母に $\sqrt{\quad}$ （ルート）を含む数避ける約束になっています。この約束に基づいて、分母から $\sqrt{\quad}$ をなくすことを分母の有理化と言います。今回はこの分母の有理化の具体例を学習します。

### 学習のポイント

- ① 分母の有理化とは
- ② 分母に $\sqrt{\quad}$ を含む計算
- ③ 分母の有理化を含む計算

### ポイント1 分母の有理化とは

数学 I では $\sqrt{\quad}$ を含む数のうち“分数の分母には特別な場合<sup>\*</sup>を除いて $\sqrt{\quad}$ を書かないこと”というルールがあります。

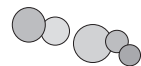
例えば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= 1 \div \sqrt{2} \quad \left( \text{分数は、} \frac{a}{b} = a \div b \right) \\ &= 1 \div (1.414\dots) \end{aligned}$$

これは筆算できません。しかし後で述べますが、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 \quad \left( \text{分母から} \sqrt{\quad} \text{をなくすと} \dots \right) \\ &= (1.414\dots) \div 2 \\ &= 0.7\dots \end{aligned}$$

ぐらいのイメージがつかます。



### 番組よりちょっと難しい話！

- <sup>\*</sup>専門的な数学の世界では

$a\sqrt{b}$ つまり、 $\circ\sqrt{\Delta}$ の形をしている数を無理数と言います。

無理数の世界で、たしたり (+)、ひいたり (-)、かけたり (×)、わったり (÷) を考えることがあります。この世界を考えるときには、分母に $\sqrt{\quad}$ をなくして考えるルールがあるので。

ちょっと、難しいですね！

**ポイント2 分母に√を含む計算**

さて、実際に有理化をしてみましょう。

**■ 2つのタイプ**

(i)  $\frac{\blacktriangle}{\sqrt{\bullet}}$  と (ii)  $\left( \frac{\blacksquare}{\sqrt{\bullet} + \sqrt{\blacktriangle}} \text{ や } \frac{\blacksquare}{\sqrt{\bullet} - \sqrt{\blacktriangle}} \right)$  があります。

(i)  $\frac{\blacktriangle}{\sqrt{\bullet}}$

$a > 0, b > 0$  として、これは、 $\frac{b}{\sqrt{a}}$  の形をしています。

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$  なので  $\frac{b}{\sqrt{a}}$  の分母と分子に分母と同じ数  $\sqrt{a}$  をかけます。

つまり、 $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$

これで、分母から√が消えました。これを分母の **有理化** と言います。

例えば、 $\frac{1}{\sqrt{3}}$  は、 $\frac{1}{\sqrt{3}}$  の分母と分子に分母の  $\sqrt{3}$  をかけます（「約分」の反対で「 $\sqrt{3}$  を倍分する」）。

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\underbrace{3}_{(\sqrt{3} \text{ が2つで3になり}\sqrt{\text{をなくせる}})}}$$

もし、 $\frac{2}{\sqrt{12}}$  だったら…、 $\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3}$   
 $= 2\sqrt{3}$  ですから、

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{12}} &= \frac{2}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

まず、2で約分  
 前述と同じように $\sqrt{3}$ を倍分  
 となります。

(ii)  $\frac{\blacksquare}{\sqrt{\bullet} + \sqrt{\blacktriangle}}, \frac{\blacksquare}{\sqrt{\bullet} - \sqrt{\blacktriangle}}$

$a > 0, b > 0$ として

$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$  の形です。


 **乗法公式の和と差の積は2乗の差!**

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 \\ &= a - b \quad \text{であることを用いて} \end{aligned}$$

$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  には、 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  を倍分、

$\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$  には、 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  を倍分します。

符号に注意です!

 **練習①** 次の式の分母を有理化してみましょう。

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

※分母の有理化には、 $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  を倍分します。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{1 \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})} && \leftarrow \begin{array}{l} \text{分母が} \\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\ = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 \\ = a - b \end{array} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \quad \text{となり分母の有理化ができました。} \end{aligned}$$

【練習②】 次の式の分母を有理化してみましょう。

$$\frac{8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{8 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{8 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{8(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2}$$

$$= \frac{8(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 4 \text{ で約分}$$

$$= 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

**ポイント3 分母の有理化を含む計算**

【問題】 次の式の分母を有理化しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

【解】

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1 \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$$

$$= 1$$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$  分母を有理化  
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$  分母は和と差の積は2乗の差