数学Ⅰ

第10回　第1章　数と式

実数の分類

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

数にはどんな数がありますか？　と聞かれたときに何と答えるでしょうか？　小数、分数……数学Ⅰでは、分数で表される数を有理数と特別な言い方をします。そして、有理数ではない数を無理数といいます。今回はこれらの言葉と無理数の中でも $\sqrt{\ }$ を含む数の計算について学習します。

学習のポイント

① 実数とは
② 無理数と有理数
③ $\sqrt{\ }$ の簡単な計算

ポイント1 実数とは

実数とはその名のとおり､「実際に存在している数」のイメージです。世の中に身近にある数は、すべて実数です。

- 温度計　→　－3℃、－2℃、－1℃、0℃、1℃、……
- ケーキの$\dfrac{1}{8}$カット
- 円周の長さは、直径×π の $\pi = 3.1415\cdots\cdots$
- 直角二等辺三角形の辺の比、$1:1:\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$

これらはすべて目の前にある数、 **実数** なのです。
英語で、real number と言います。リアルなんです。realは、“実際の”“実在する”という意味です。

ポイント2 無理数と有理数

■まず、有理数から

1、2、3、4、5、…、1つ、2つ、3つ、…と数えるときの1、2、3、…を $\boxed{\text{自然数}}$ と言います。ただ、0つとは言いませんので1からです。

さらに、−3、−2、−1、0、1、2、3……これを $\boxed{\text{整数}}$ と言い、−3、−2、−1を $\boxed{\text{負の整数}}$ 。1、2、3……を $\boxed{\text{正の整数}}$ と言います。

この整数を使って分数を作ります。

$$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}\ \text{を}\ \boxed{\text{有理数}}\ \text{と言います。}$$

（ただし、分数の分母には“0”は来ません）

さて、数にはこの有理数で表せないものがあります。

例えば、　$\pi = 3.1415\cdots\cdots$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots\cdots$

$\sqrt{3} = 1.7320\cdots\cdots$

これらは$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$の形では表せません。このような、$\pi$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ などを $\boxed{\text{無理数}}$ と言います。

まとめると

数の分類

- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 正の整数（自然数）
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
  - 無理数

実数

有理数

$\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{5}$, 0.3, …

整数

…, −2, −1, 0

自然数

1, 2, 3, …

無理数

$\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, π, …

ポイント3 $\sqrt{\ }$の簡単な計算

■平方根

まず、$x \times x = 1$　となるxを求めてみましょう。

つまり、同じ数を2回かけて、1になる数です。

⇩

同じ数を2回かけることを2乗と言います。これを別の言い方で **平方** と言います。

この$x \times x = 1$のxを方程式の **解**（答え）と言います。

解を **根** とも言うので、$x \times x = 1$となるxは、**1の平方根** と呼びます。

したがって、

1の**平方根**は、1と−1です。

2回
かけて

1になる**解**は、1と−1

と言うことは、4の平方根は？　$x \times x = 4$ですから、$x = 2$と-2となります。

では、3の平方根はどうでしょう？

$x \times x = 3$となるxです。

ここで登場するのが$\sqrt{\ }$の記号です。$\sqrt{\ }$はルートと読みます root は、植物などの「根」を表すことから、根源、根本という意味もあるのです。

そこで、$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$　と定めます。

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$　の形です。

ただし、$a \geqq 0$　です。

また、$(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$になります。これは、負の数×負の数＝正の数だからです。

と言うことから、$x \times x = 3$となるxは、

$x = \sqrt{3}$あるいは、$x = -\sqrt{3}$

つまり、3の平方根は、$\sqrt{3}$と$-\sqrt{3}$となります。

一般に$a \geqq 0$のとき、

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$　となります。

■簡単な$\sqrt{\ }$の計算

$a \geqq 0$のとき

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$です。

例えば、$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9} = 3$です。

2つの同じ(0以上の)数のうちの1つが出る。

まとめ

$a \geqq 0$のとき

[1] $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

[2] $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

[3] [1]と[2]から　$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$

また、 $a \geqq 0$、$b > 0$のとき

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$ となります。

使ってみましょう！

Q1：次の計算をしなさい。

①$\sqrt{18}$

②$\sqrt{180}$

番組よりちょっと難しい話！

$a < 0$でも、$a = 0$でも、$a \geqq 0$でも

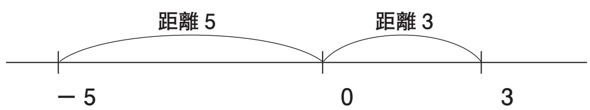
$\sqrt{a^2}$の計算ができます。

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = a$　　←は、✕　です。

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = |-a|$　で、絶対値になります。

絶対値とは、その数の大きさだけを表します。ちょうど、数直線の0からの距離です。

ですから、



$|-5| = 5$、$|3| = 3$となります。

ということは……、$\sqrt{a^2} = a$と仮定すると

$\sqrt{(-5)^2} = -5$　は、間違いです。←　($a = -5$)

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$　となります。

$\parallel$

($\sqrt{25}$)

ちょっと、難しいですね！

Ａ：①　$\sqrt{18}=\sqrt{2\times\underbrace{3\times 3}_{2つ}}=3\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

②　$\sqrt{180}=\sqrt{\underbrace{2\times 2}_{2つ}\times\underbrace{3\times 3}_{2つ}\times 5}$

$=2\times 3\times\sqrt{5}$

$=6\sqrt{5}$

参 180 を素因数分解するには“すだれ算”

2)	180
2)	90
3)	45
3)	15
5)	5
	1

Ｑ２：$\sqrt{12}+\sqrt{27}$　を計算してみましょう。

Ａ：まず、$●\sqrt{▲}$の形を作ります。

$\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{\underbrace{2\times 2}_{2つ}\times 3}+\sqrt{\underbrace{3\times 3}_{2つ}\times 3}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

ここで、**文字式の同類項の計算と同じ作業**をします。

$\sqrt{3}$ を a とイメージすると、～～～部分は $2a+3a$ です。

つまり $2a+3a=5a$ ですから、$\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ は、

$=5\sqrt{3}$　となります。

注意しましょう！

$\sqrt{12}+\sqrt{18}$　を計算してみましょう。

$\sqrt{12}+\sqrt{18}$

$=\sqrt{\underbrace{2\times 2}_{2つ}\times 3}+\sqrt{2\times\underbrace{3\times 3}_{2つ}}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

これ以上計算はできませんから、これが**答え**です。

$\sqrt{▲}$ の▲が同じときだけ計算できます。