第９回　　第１章　数と式

因数分解をもっと知る

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

因数分解には、テクニカルなパズルのような要素があります。それがたすきがけです。簡単に言えば、２つの数のたし算が２となる２つの数はなんでしょう？　クイズのように楽しんでください。間違ってもいいんです。クイズの全問正解を目指すように学習していきましょう。

学習のポイント

① たすきがけのしくみ
② たすきがけの因数分解とは
③ いろいろな因数分解に慣れる

ポイント1　たすきがけのしくみ

■ $(ax+b)(cx+d)$の展開

$(ax+b)(cx+d)$の　(　　)の中を項に区切って展開すると、

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

ここでこの式の右辺x^2とxの係数と定数項に注意してみると……、

$$(ax+b)(cx+d)=\underbrace{acx^2}_{\substack{ac \\ \downarrow \\ a\times c}}+\underbrace{(ad+bc)}_{\substack{ad+bc \\ ※}}x+\underbrace{bd}_{\substack{bd \\ \downarrow \\ b\times d}}$$

これを縦書きにしてみると

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & = & bc \\ \times & & \times & & \\ c & & d & = & ad \end{array}$$

（たすきにかけて）

※

たすきにかけてxの係数が出てきます。

ポイント2 たすきがけの因数分解とは

$$\begin{array}{ccc} a & \searrow\!\!\nearrow & b \\ \times & & \times \\ c & & d \end{array}$$

の部分の横に(　)をつけると

$$\begin{array}{ccc} (a & \searrow\!\!\nearrow & b) \\ \times & & \times \\ (c & & d) \end{array}$$

⇨ $ax+b$

⇨ $cx+d$　です。

つまり、$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd}$ の因数分解をするには、

STEP 1　x^2の係数と定数項をそれぞれ2つの数のかけ算でタテに表す

x^2の係数	定数項
a	b
×	×
c	d

STEP 2　たすきにかける、その結果をその右側に書く

x^2の係数	定数項	
a	b	$=bc$
×	×	
c	d	$=ad$

STEP 3　STEP2 で得られた数をたす

x^2の係数	定数項		
a	b	=	bc
×	×		
c	d	=	ad　(+
			$bc+ad$

この部分がxの係数になっていたら

STEP 4　x^2の係数、定数項の部分に(　)を付ける

$$\begin{array}{ccc} (a & \searrow\!\!\nearrow & b)=bc \\ \times & & \times \\ (c & & d)=ad \end{array}$$

(　)の並びを変えないように $\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)}$ とします。

この STEP 1 ～ STEP 4 の流れを **たすきがけの因数分解** と呼びます。

たすきがけ早見表

STEP 1：x^2 と定数項をかけ算で表す
STEP 2：STEP 1 の数をたすきにかけて右側へ
STEP 3：STEP 2 の数をたして x の係数になったら
STEP 4：STEP 1 の数を（　　）でくくる

■使ってみよう！

$\mathbf{2x^2 + 7x + 5}$ を因数分解します。

STEP 1：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \times & & \times \\ 2 & & 5 \end{array}$$

STEP 2：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \times & & \times \\ 2 & & 5 \end{array}$$

STEP 3：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & = & 2 \\ \times & & \times & & \\ 2 & & 5 & = & 5 \quad (+ \\ \hline & & & & \mathbf{7} \end{array}$$

←xの係数になった！

STEP 4：

$$\begin{array}{ccc} (1 & & 1) \\ \times & & \times \\ (2 & & 5) \end{array}$$

$(1x+1)(2x+5) = (x+1)(2x+5)$

1 は省略できる（文字式のルール）

つまり、

$\mathbf{2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(2x + 5)}$　　となります。

ポイント3 いろいろな因数分解に慣れる

■ 同じものは置き換える

例えば、$(x+y)^2+7(x+y)+10$　の因数分解をするときは…

$x+y=A$　とおいて、

$A^2+7A+10$　　これは2つの数の和が**7**

2つの数の積が**10**のタイプ

この2つの数は、2と5なので

$A^2+7A+10=(A+2)(A+5)$

ここで、$A=x+y$に戻して、

$(x+y)^2+7(x+y)+10=(x+y+2)(x+y+5)$

Q：もう一題やってみましょう。

$2(x+y)^2-5(x+y)+2$　を因数分解すると…

まず、$x+y=A$とおくと

$2(x+y)^2-5(x+y)+2$

$=2A^2-5A+2$

たすきがけの方法を使おう！

$$\begin{array}{ccc} 1 & & (-2)= & -4 \\ \times & & \times & \\ 2 & & (-1)= & -1 \quad (+ \\ \hline & & & -5 \end{array}$$

STEP 1 ～ STEP 3

$$\begin{array}{ccc} (1 & & (-2)) \\ \times & & \times \\ (2 & & (-1)) \end{array}$$

STEP 4

$(A-2)(2A-1)=(x+y-2)\{2(x+y)-1\}$

$=(x+y-2)(2x+2y-1)$