数学Ⅰ

第４回　第1章　数と式

整数の乗法

監修・講師
湯浅弘一

今回学ぶこと

整数どうしを展開することが目的です。そのための準備があります。累乗の計算や分配法則のルールの確認です。今回の式の展開のルールは、この後の学習にとても重要ですので、ルールの仕組みとルールを覚えていきましょう。

学習のポイント
① 累乗とは
② 整式の展開
③ 分配法則を用いて整式の積を計算する

ポイント1 累乗とは

“**累**”難しい漢字です。野球の“**塁**”とは異なります。でも似ているところがあります。両方とも重ねるという意味があるそうです。土を重ねて造ったとりでのようなイメージが“塁”。野球のベースもそうです。

さて、本題の「累」には、重ねる、繰り返すの意味があります。

$x \times x = x^2$

$x \times x \times x = x^3$

$x \times x \times x \times x = x^4$

このように同じ数や文字を繰り返してかけ合わせることを

$\boxed{\text{累乗}}$ と言います。

繰り返し　かける

$\boldsymbol{x \times x \times x = x^3}$　この右肩の小さな数を **指数** と呼びます。

例えば…

$x^2 \times x^3$ は、$x^2 = x \times x$

$x^3 = x \times x \times x$　　ですから

$x^2 \times x^3 = x \times x \times x \times x \times x = x^5$

つまり、 $\boxed{\boldsymbol{x^m \times x^n = x^{m+n}}}$ が成り立ちます。

$(x^2)^3$ は、$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2$　　← (x^2) が 3 つです。

$= (x \times x) \times (x \times x) \times (x \times x)$　　← x が $2 \times 3 = 6$ 個です。

$= x^6$

つまり、 $\boxed{\boldsymbol{(x^m)^n = x^{mn}}}$ が成り立ちます。

では、$(x^2y)^3$ はいかがでしょうか？

$(x^2y)^3 = x^2y \times x^2y \times x^2y$　　← (x^2y) が 3 つです。

$= (x \times x \times y) \times (x \times x \times y) \times (x \times x \times y)$　　← x が 6 個、y が 3 個あります。

$= x^6y^3$

つまり、 $\boxed{\boldsymbol{(x^my^n)^l = x^{ml}y^{nl}}}$ が成り立ちます。

まとめると

指数法則

$$\boldsymbol{x^m \times x^n = x^{m+n}}$$
$$\boldsymbol{(x^m)^n = x^{mn}}$$
$$\boldsymbol{(xy)^n = x^ny^n}$$

■単項式の乗法

次に、単項式×単項式を考えます。

$2a \times 3b$ であれば、

$$2a \times 3b = 2 \times a \times 3 \times b$$

$$= \underbrace{2 \times 3}_{\text{数字だけ}} \times \underbrace{a \times b}_{\text{文字だけ}}$$

に振り分けます。

$$= 6ab$$

数字だけは計算する

つまり、$2a \times 3b = 6ab$　となります。

さらに、

$$2a \times 3ab = 2 \times a \times 3 \times a \times b$$

$$= \underbrace{2 \times 3}_{\text{数字だけ}} \times \underbrace{a \times a \times b}_{\text{文字だけ}}$$

に振り分けます。

$a \times a = a^2$ 累乗の形で表します。

$$= 6 \times a^2 \times b$$

$$= 6a^2b$$

つまり、$2a \times 3ab = 6a^2b$　となります。

ポイント2　整式の展開

分配法則

① $A(B + C) = AB + AC$

② $(A + B)C = AC + BC$

上記の法則を使って実際に展開してみましょう。

まず、①の法則から…

$x(x+2)$ ならば、 $x(x+2) = x \times x + x \times 2$

$x \times x$ は累乗へ
$x \times 2$ は数字が前へ

$= x^2 + 2x$

$2x(x+3)$ ならば、 $2x(x+3) = 2x \times x + 2x \times 3$

まとまり

$= 2x^2 + 6x$

$-3x(x-4)$ ならば、 $-3x(x-4) = -3x \times x + 3x \times 4$

まとまり　　$(-)\times(-)$

$= -3x^2 + 12x$

(　　)の前の部分は $\boxed{\text{1つのまとまり}}$ と見ましょう。

次は、②の法則です。

$(x+2)x = (x+2)x$

$= x \times x + 2x$

$= x^2 + 2x$

$(x+3) \times 2x = (x+3) \times 2x$

まとまり

$= x \times 2x + 3 \times 2x$

$= 2x^2 + 6x$

$(x-4) \times (-3x) = (x-4) \times (-3x)$

まとまり

$= x(-3x) - 4 \times (-3x)$

$= -3x^2 + 12x$

ポイント3 分配法則を用いて整式の積を計算する

式の展開のルール

$$(a+b)(x+y)$$

$$=(a+b)(x+y)$$

$$=\underset{①}{ax}+\underset{②}{ay}+\underset{③}{bx}+\underset{④}{by}$$

例えば…

$(2a+3b)(4c-5d)$ の展開は

$$(2a+3b)(4c-5d)$$ ← 項に区切る

$$=\underbrace{2a\times 4c}_{①}+\underbrace{2a(-5d)}_{②}+\underbrace{3b\times 4c}_{③}+\underbrace{3b\times(-5d)}_{④}$$

$$=8ac-10ad+12bc-15bd$$ となります。