第83回　第５章　微分と積分「積分」

面積 (1)
～ 定積分と面積 ～

講師
川﨑 宣昭

曲線や直線で囲まれた図形の面積を，定積分を用いて求めます。今回は，三角形，台形，$f(x) \geqq 0$ となっている図形の面積を求めます。

学習のポイント
① 三角形や台形の面積と定積分との関係
② 定積分を用いて図形の面積を求める方法
③ $f(x) \geqq 0$ となる場合の面積

1 三角形や台形の面積と定積分との関係

図形の面積と定積分の関係を考えます。
図１のグレーの三角形の面積は，
底辺の長さが x，高さが $2x$ の直角三角形なので，
面積 $F(x)$ は，

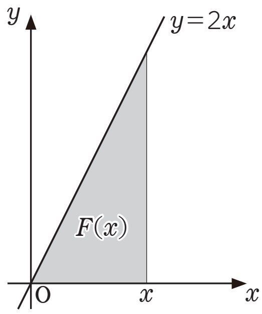
$$F(x) = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$$

ここで，

$$F'(x) = 2x$$

になっているので，$F(x)$ は関数 $y = 2x$ の不定積分の１つになっています。

図１



次に，下の図２の斜線部分の面積を求めてみましょう。
求める面積は，図３の水色の部分の面積から図４の緑色の部分の面積を引けば求められます。
図３の水色の部分の面積は $F(3)$，図４の緑色の部分の面積は $F(1)$ なので，

$$S = F(3) - F(1) = 3^2 - 1^2 = 8$$

これらのことから，

$$S = 3^2 - 1^2 = \left[x^2\right]_1^3 = \int_1^3 2x\,dx$$

が成り立ちます。

大きい三角形の面積から，小さい三角形の面積を引けば，
$x = 1$ から $x = 3$ の範囲の面積がわかります。

図２

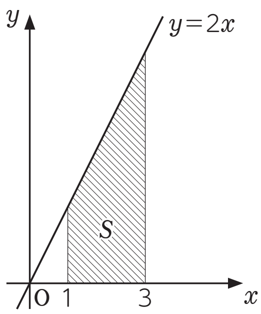


図３

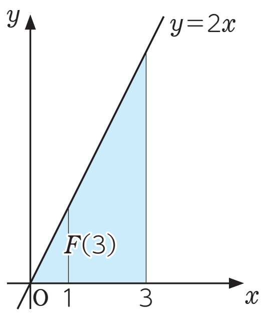
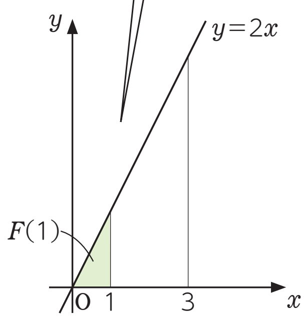


図４

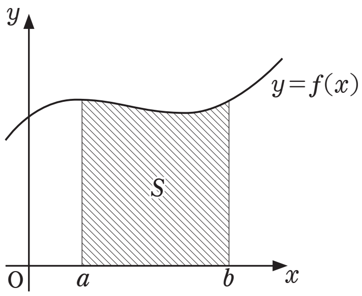


他の関数の場合も同様のことがいえます。
まとめると，以下のようになります。

定積分と面積

$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき，
曲線 $y=f(x)$，２直線 $x=a$，$x=b$
によって囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



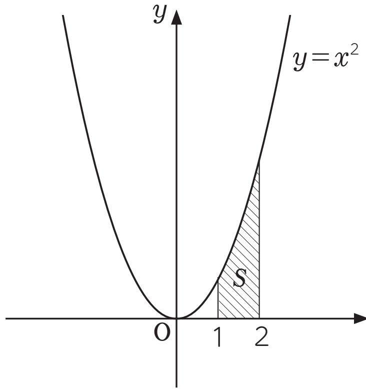
2 定積分を用いて図形の面積を求める方法

例　曲線 $y=x^2$ と x 軸および２直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。
$1 \leqq x \leqq 2$，$x^2 \geqq 0$ であるから，

$$S=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}(2^3-1^3)=\frac{1}{3}(8-1)$$

$$=\frac{7}{3}\quad\text{（答）}$$



3 $f(x) \geqq 0$ となる場合の面積

例　曲線 $y=-x^2+5$ と x 軸，および２直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

解答　$-1 \leqq x \leqq 2$ で $-x^2+5 \geqq 0$ であるから，

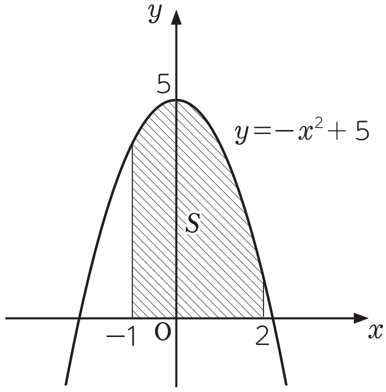
$$S=\int_{-1}^2(-x^2+5)\,dx=-\int_{-1}^2 x^2\,dx+5\int_{-1}^2 dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2+5\left[x\right]_{-1}^2=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^2+5\left[x\right]_{-1}^2$$

$$=-\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}+5\{2-(-1)\}$$

$$=-\frac{1}{3}(8+1)+5(2+1)=-3+15$$

$$=12\quad\text{（答）}$$



問1　曲線 $y = x^2$ と x 軸，および2直線 $x = 3$，$x = 5$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

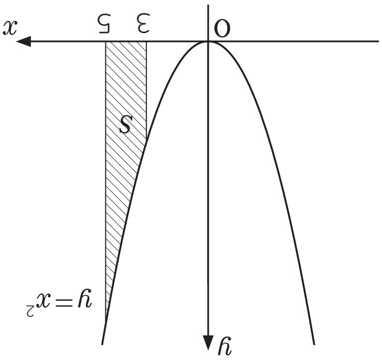
問2　曲線 $y = -x^2 + 5$ と x 軸，および2直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

問1・解答

$3 \leqq x \leqq 5$ で $x^2 \geqq 0$ であるから

$$S = \int_3^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_3^5$$

$$= \frac{1}{3}(5^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}$$



問2・解答

$1 \leqq x \leqq 2$ で $-x^2 + 5 \geqq 0$ であるから

$$S = \int_1^2 (-x^2 + 5)\,dx = -\int_1^2 x^2\,dx + 5\int_1^2 dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 5\left[x\right]_1^2 = -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 + 5\left[x\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}(2^3 - 1^3) + 5(2 - 1) = -\frac{1}{3}(8 - 1) + 5(2 - 1)$$

$$= -\frac{7}{3} + \frac{15}{3} = \frac{8}{3}$$