

不定積分 (2)

～ 不定積分の計算 ～

講師
川崎 宣昭

関数の実数倍の不定積分、関数の和や差の不定積分を求めます。また、積分定数を決定する方法について学びます。

学習のポイント

- ① 関数の実数倍の不定積分
- ② 関数の和や差の不定積分
- ③ 積分定数の決定

原則 計算の方法は「微分と逆」と考えましょう！

1 関数の実数倍の不定積分

k を定数とします。 $F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、

$$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$$

したがって、以下の公式が成り立ちます。

不定積分の公式

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

例) $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \times \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 + C$ ← 積分定数 C を忘れずに書きましょう！

2 関数の和や差の不定積分

$F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ が成り立つとき、

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

したがって、以下の公式が成り立ちます。

不定積分の公式

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

例えば・・・

$$(1) \int(x^2+x)dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \text{ (答)}$$

$$(2) \int(x^2-3x+2)dx = \int x^2 dx - 3\int x dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 2 \times x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \text{ (答)}$$

積分定数は、
どのような定数(値)でも良いので、
まとめてCとかきましょう!

例 不定積分 $\int(x+1)(2x-3)dx$ を求めなさい。

解答 $\int(x+1)(2x-3)dx = \int(2x^2-x-3)dx$

$$= 2\int x^2 dx - \int x dx - 3\int dx$$

$$= 2 \times \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x + C \text{ (答)}$$

最初に()を展開し、
項ごとにわけて積分する。

3 積分定数の決定

例 関数 $f(x) = 2x + 3$ の不定積分のうち、 $F(1) = 5$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

解答 $\int(2x+3)dx = 2\int x dx + 3\int dx$

$$= 2 \times \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= x^2 + 3x + C$$

ここで、 $F(1) = 5$ であるから、 ← この条件から積分定数 C の値が決まる

$$1^2 + 3 \times 1 + C = 5$$

$$4 + C = 5$$

$$C = 1$$

よって、求める関数 $F(x)$ は、 $F(x) = x^2 + 3x + 1$ (答)
