

関数の最大・最小

講師
渡部 儀隆

～ 与えられた定義域での関数の最大・最小 ～

学習のポイント

- ① 3次関数の最大値と最小値
- ② 極小値・最小値と極大値・最大値
- ③ 関数の最大・最小の応用

増減表やグラフを利用して、決められた x の値の範囲で、関数の最大値・最小値を求めよう。

1 3次関数の最大値と最小値

例 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$$y = x^3 - 3x^2 + 1 \quad (-2 \leq x \leq 3)$$

↑

$(-2 \leq x \leq 3)$ は、この関数の定義域が $-2 \leq x \leq 3$ であることを表す。

解答 $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0$ の解は $x = 0, 2$

$-2 \leq x \leq 3$ における y の増減表は次のようになります。

x	-2	...	0	...	2	...	3
y'		※2 +	0	※4 -	0	※6 +	
y	※1 -19	↗	※3 極大 1	↘	※5 極小 -3	↗	※7 1

よって、この関数は

$x = 0, 3$ のとき、最大値 1

$x = -2$ のとき、最小値 -19

をとります。

(※1) $x = -2$ のとき、 $y = -8 - 12 + 1 = -19$

(※2) $x = -2$ のとき、 $y' = 3 \times (-2) \times (-4) = 24$ よりプラス

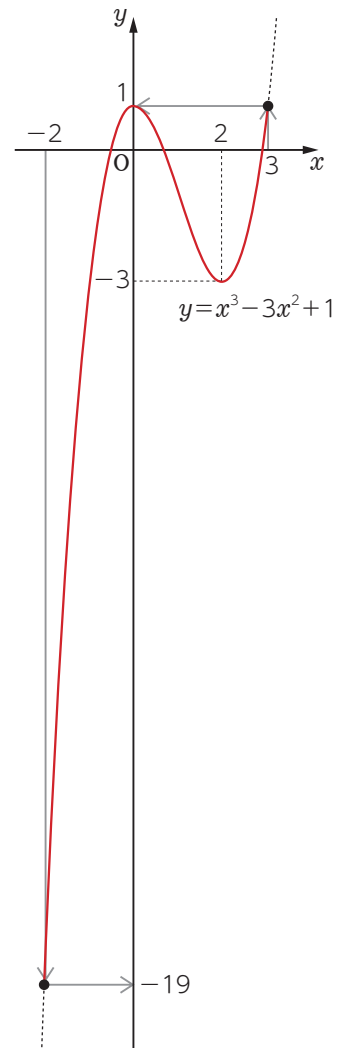
(※3) $x = 0$ のとき、 $y = 0 - 0 + 1 = 1$

(※4) $x = 1$ のとき、 $y' = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ よりマイナス

(※5) $x = 2$ のとき、 $y = 8 - 12 + 1 = -3$

(※6) $x = 3$ のとき、 $y' = 3 \times 3 \times 1 = 9$ よりプラス

(※7) $x = 3$ のとき、 $y = 27 - 27 + 1 = 1$

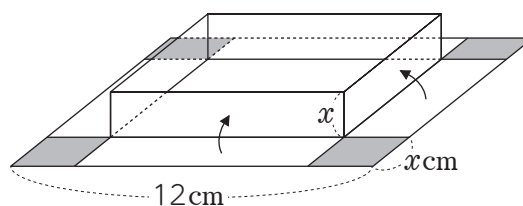


2 極小値・最小値 と 極大値・最大値

極小値が最小値になるとはかぎりません。
同様に、極大値が最大値になるとはかぎりません。

3 関数の最大・最小の応用

例 1 辺が 12 cm の正方形の紙があります。いま、この 4 隅から 1 辺が x cm の同じ大きさの正方形を切り取り、その残りを折り曲げて、ふたのない高さ x cm の直方体の箱を作ります。この箱の容積を最大にするには、 x の値をいくらにすればよいですか。



解答 箱の底面の 1 辺は $(12 - 2x)$ cm，高さは x cm です。これらは正であるから

$$0 < x < 6$$

箱の容積を y cm³ とすると

$$\begin{aligned} y &= x(12 - 2x)^2 \\ &= 4x^3 - 48x^2 + 144x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2 - 96x + 144 \\ &= 12(x^2 - 8x + 12) \\ &= 12(x - 2)(x - 6) \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ の解は } x = 2, 6$$

$0 < x < 6$ の範囲で y の増減表は、次のようになります。

x	0	...	2	...	6
y'		※1 +	0	※3 -	
y		↗	※2 極大 128	↘	

この極大値が最大値になる

よって、容積を最大にするには、 $x = 2$ とすればよい。

(※1) $x = 1$ のとき、 $y' = 12 \times (-1) \times (-5) = 60$ よりプラス

(※2) $x = 2$ のとき、 $y = 2 \times 8^2 = 128$

(※3) $x = 3$ のとき、 $y' = 12 \times 1 \times (-3) = -36$ よりマイナス

連立不等式

$$\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases}$$

を解いて $0 < x < 6$

