

関数のグラフ

～ 関数の極値とそのグラフ ～

講師
渡部 儀隆

学習のポイント

関数の極大値・極小値を求めて、その関数のグラフをかきます。

- ① 極値の求め方の復習
- ② 極値を求めてみよう!
- ③ 3次関数のグラフのかき方

1 極値の求め方の復習

前回学習した、極値の求め方を復習しましょう!

まず、関数を微分して導関数 y' を求めます。

次に、 $y' = 0$ を解き、導関数が 0 となる x の値を求めます。

そして、 $y' = 0$ となる x の値の前後で y' の符号を調べ、増減表を完成させましょう。

y' がプラスからマイナスに変わるところで極大となり、そのときの y の値が極大値です。

また、 y' がマイナスからプラスに変わるところで極小となり、そのときの y の値が極小値です。

2 極値を求めてみよう!

例 関数 $y = -x^3 + 3x + 1$ の極値を求め、グラフをかきなさい。

解答 まず、極値を求めます。

$$y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x+1)(x-1)$$

$$y' = 0 \text{ の解は } -3(x+1)(x-1) = 0 \text{ を解いて、}$$

$$x = -1, 1$$

y の増減表は、次のようになります。

| | | | | | |
|------|---------|----------------|---------|---------------|---------|
| x | ... | -1 | ... | 1 | ... |
| y' | ※1 - | 0 | ※3 + | 0 | ※5 - |
| y | ↘ | ※2 極小 -1 | ↗ | ※4 極大 3 | ↘ |

よって、この関数は

$$x = 1 \text{ のとき 極大値 } 3$$

$$x = -1 \text{ のとき 極小値 } -1$$

(※1) $x = -2$ のとき、
 $y' = -3 \times (-1) \times (-3) = -9$
 よりマイナス

(※2) $x = -1$ のとき、 $y = 1 - 3 + 1 = -1$

(※3) $x = 0$ のとき、
 $y' = -3 \times 1 \times (-1) = 3$ よりプラス

(※4) $x = 1$ のとき、 $y = -1 + 3 + 1 = 3$

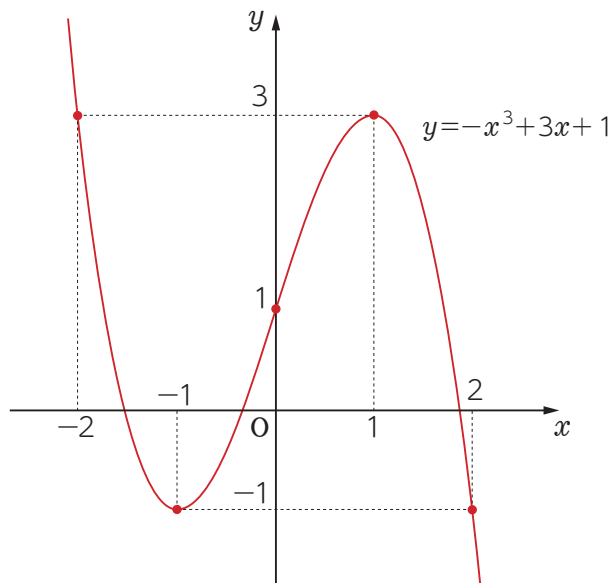
(※5) $x = 2$ のとき、
 $y' = -3 \times 3 \times 1 = -9$
 よりマイナス

3 3次関数のグラフのかき方

ポイント2の例でつくった増減表から得られる関数の増加・減少のようすや極大・極小などの情報を利用して、グラフをかいてみましょう。

さらに、グラフが通る点(-2, 3), (2, -1), (0, 1)などを考えあわせると、より正確なグラフがかけます。

この関数のグラフは次のようになります。



例 関数 $y = x^3 - 3x - 2$ のグラフをかきなさい。

解答 まず、極値を求めます。

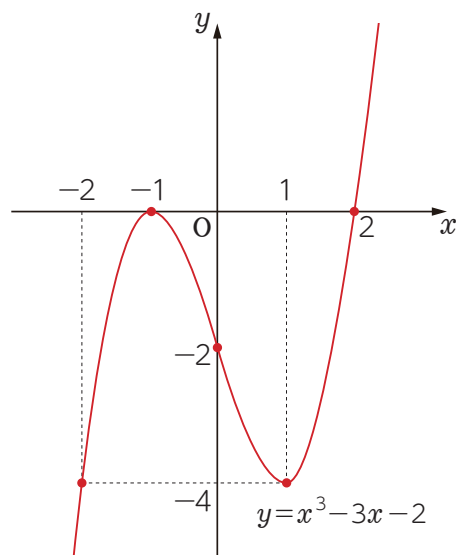
$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$y' = 0 \text{ の解は } 3(x+1)(x-1) = 0 \text{ を解いて、} \\ x = -1, 1$$

この値に注目して増減表をつくります。

| | | | | | |
|------|------|------------|------|-------------|------|
| x | ... | -1 | ... | 1 | ... |
| y' | ※1 + | 0 | ※3 - | 0 | ※5 + |
| y | ↗ | ※2 極大 0 | ↘ | ※4 極小 -4 | ↗ |

よって、この関数は $x = 1$ のとき 極大値 3
 $x = -1$ のとき 極小値 -1



(※1) $x = -2$ のとき, $y' = 3 \times (-1) \times (-3) = 9$ よりプラス

(※2) $x = -1$ のとき, $y = -1 + 3 - 2 = 0$

(※3) $x = 0$ のとき, $y' = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ よりマイナス

(※4) $x = 1$ のとき, $y = 1 - 3 - 2 = -4$

(※5) $x = 2$ のとき, $y' = 3 \times 3 \times 1 = 9$ よりプラス