

指数関数とそのグラフ(2)

講師
川崎 宜昭

～ 指数関数の利用 ～

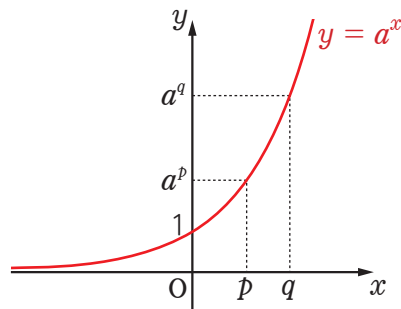
学習のポイント

指数関数のグラフの性質をまとめます。
また、指数関数 $y = a^x$ のグラフの性質を使って、数の大小を調べます。

- ① $y = a^x$ のグラフのまとめ
- ② $2^{\frac{1}{2}}$, 2^{-1} , 2^0 の大小関係
- ③ 指数を含んだ方程式

1 $y = a^x$ のグラフのまとめ

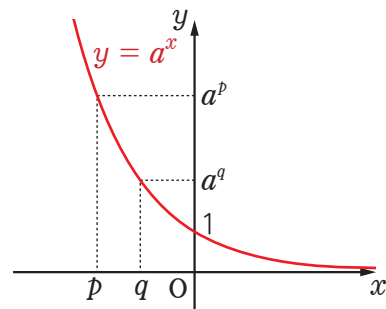
- (1) $a > 1$ のとき
(指数の底が1より大きい)
 $p < q \iff a^p < a^q$



x の値が大きくなると、 y の値も大きくなる。

例) $y = 2^x$, $y = 3^x$ など

- (2) $0 < a < 1$ の場合
(指数の底が0と1の間)
 $p < q \iff a^p > a^q$



x の値が大きくなると、 y の値は小さくなる。

例) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ など

※ \iff の記号は、左右の内容が同じである (同値である) ことを意味します。

2 $2^{\frac{1}{2}}$, 2^{-1} , 2^0 の大小関係

グラフの特徴の利用

☆ 底が1よりも大きい場合 → 指数が大きいほど値は大きい

☆ 底が0よりも大きく1より小さい場合 → 指数が大きいほど値は小さい

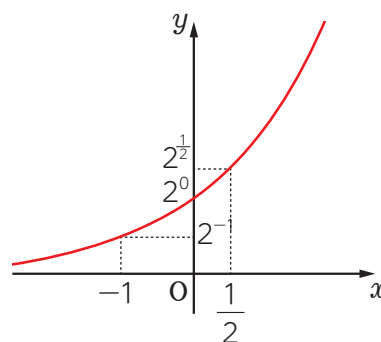
例 $2^{\frac{1}{2}}$, 2^{-1} , 2^0 を小さい方から順に並べなさい。

➡ <方針> 底が1よりも大きいので、指数が大きいほど値は大きい。

解答 指数を小さい順に並べると、 $-1, 0, \frac{1}{2}$

底「2」は1より大きいので、 $2^{-1} < 2^0 < 2^{\frac{1}{2}}$

したがって、 $2^{-1}, 2^0, 2^{\frac{1}{2}}$



もし、底が $\frac{1}{2}$ ならば、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ のように大小関係が逆になります。

3 指数を含んだ方程式

例 方程式 $9^x = 27$ を解きなさい。

➡ <方針> 9と27の数から考えて、両辺の底を3にそろえるとよい。

解答 $9^x = 27$

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, $27 = 3^3$ より、

$3^{2x} = 3^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

問1 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $3, 3^{-2}, 3^{\frac{2}{3}}$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

問2 次の方程式を解きなさい。

(1) $7^x = 49$ (2) $4^x = 8$ (3) $5^x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

問1・解答

(1) $3 = 3^1$ である。指数を小さい順に並べると、 $-2, \frac{3}{4}, 1$
底「3」は1より大きいので、 $3^{-2} < 3^{\frac{3}{4}} < 3^1$
したがって、 $3^{-2}, 3^{\frac{3}{4}}, 3$
指数を小さい順に並べると、 $-\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{3}$
底「 $\frac{1}{4}$ 」は0と1の間の数であるから、 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{1}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{1}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$
したがって、 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{1}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{1}}$

問2・解答

(1) $7^x = 49$ $7^x = 7^2$ より、 $x = 2$
(2) $4^x = 8$
 $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}, 8 = 2^3$ より、
 $2^{2x} = 2^3$
 $2x = 3$
 $x = \frac{3}{2}$
(3) $5^x = 1$
 $1 = 5^0$ より、
 $5^x = 5^0$
 $x = 0$