第50回　第3章　三角関数「加法定理」

弧度法 (2)

～ 弧度法は便利！～

講師
水谷 信也

弧度法をつかっておうぎ形の弧の長さを求めたり，面積を求めることについて学ぶ。

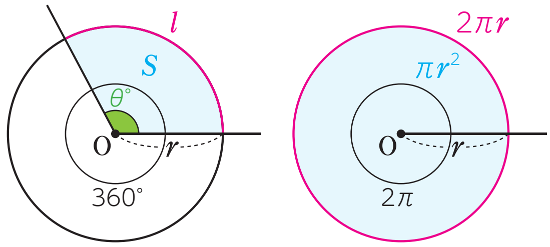
学習のポイント
① 度数法によるおうぎ形の弧の長さと面積
② 弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積
③ おうぎ形の弧の長さと面積の求め方

1 度数法によるおうぎ形の弧の長さと面積

復習をかねて度数法で，おうぎ形の弧の長さと面積を求めてみましょう。
半径が r，中心角が θ° のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とすると，
半径が r の円では，円周の長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 なので

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

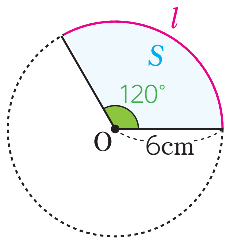


例

半径 6cm，中心角 120° のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = 2\pi \times 6 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 4\pi \text{ (cm)}$$

$$S = \pi \times 6^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



2 弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とする。
θ が弧度法で表されているとき，これらの間に成り立つ関係を調べてみましょう。
弧の長さの比と中心角の比は等しいから，

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

よって，

$$2\pi l = 2\pi r\theta$$

したがって，

$$l = r\theta$$

面積の比と中心角の比は等しいから

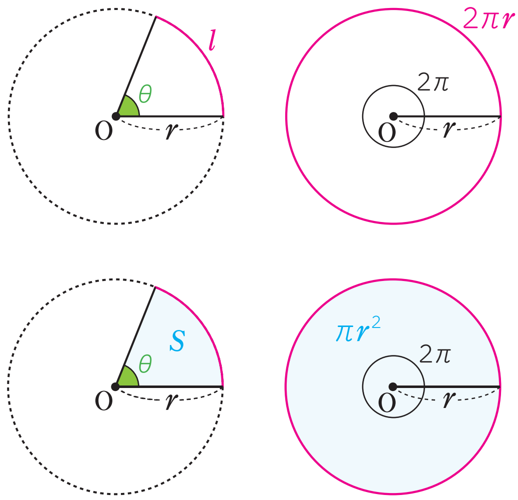
$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

よって，

$$2\pi S = \pi r^2\theta$$

したがって，

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S は

$$l = r\theta\ ,\qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$

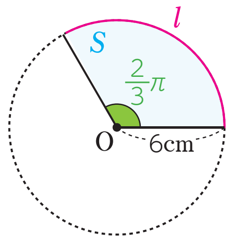
3 おうぎ形の弧の長さと面積の求め方

先ほどの 1 の例を弧度法で計算してみよう。

半径 6cm，中心角 $120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，

弧の長さ　$l = r\theta = 6 \times \dfrac{2}{3}\pi = 4\pi$ (cm)

面積　$S = \dfrac{1}{2} \times r^2\theta = \dfrac{1}{2} \times 6^2 \times \dfrac{2}{3}\pi = 12\pi$ (cm^2)

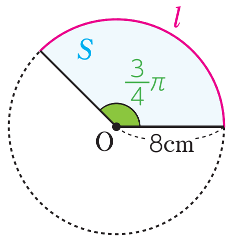


例

半径 8cm，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ のおうぎ形の，

弧の長さ l は　$l = 8 \times \dfrac{3}{4}\pi = 6\pi$ (cm)

面積 S は　$S = \dfrac{1}{2} \times 8^2 \times \dfrac{3}{4}\pi = 24\pi$ (cm^2)



おうぎ形の面積を三角形の面積を求めるイメージで求めると、
弧の長さ l を底辺に，半径 r を高さに見立てて，

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 8 = 24\pi \ (\text{cm}^2)$$