

加法定理の応用 (2)

講師
水谷 信也

～ 三角関数の合成 ～

学習のポイント

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のように, \sin と \cos の和の形を \sin だけの式 $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に直すことについて学びます。

- ① 三角関数の合成とは?
- ② 三角関数の合成の公式
- ③ 三角関数の合成の公式の使い方

1 三角関数の合成とは?

$$\begin{aligned} 2 \times \sin(\theta + 30^\circ) &= 2\sin\theta \cos 30^\circ + 2\cos\theta \sin 30^\circ \\ &= 2\sin\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos\theta \times \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \end{aligned}$$

したがって, 逆にたどれば, $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ は, $r\sin(\theta + \alpha)$ という形に変形できます。この場合は, $r = 2$, $\alpha = 30^\circ$ となります。

$a\sin\theta + b\cos\theta$ という形の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形にすることを, **三角関数の合成** といいます。

2 三角関数の合成の公式

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形にすることを考えてみましょう。

$r\sin(\theta + \alpha)$ に加法定理を用いると

$$\begin{aligned} r\sin(\theta + \alpha) &= r\sin\theta \cos\alpha + r\cos\theta \sin\alpha \\ &= r\cos\alpha \sin\theta + r\sin\alpha \cos\theta \end{aligned}$$

↪ r と α は定数なので $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$ が各項の前になるように並べ替える

よって, $r\cos\alpha = \sqrt{3}$, $r\sin\alpha = 1$ を満たす r と α を求めます。

● r の求め方

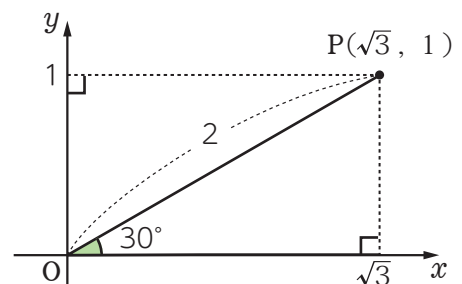
$$\begin{aligned} (r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 &= r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4 \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \text{ より, } r^2 = 4 \\ r > 0 \text{ より, } r &= 2 \end{aligned}$$

● α の求め方

$r = 2$ を $r\cos\alpha = \sqrt{3}$, $r\sin\alpha = 1$ に代入すると

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ となり, } \alpha = 30^\circ$$

以上のことから, $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin(\theta + 30^\circ)$



このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の場合は、

$$r^2 = a^2 + b^2 \text{ となって、 } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$r\cos\alpha = a, r\sin\alpha = b$ より

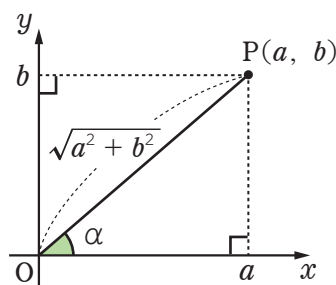
$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし、

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



3 三角関数の合成の公式の使い方

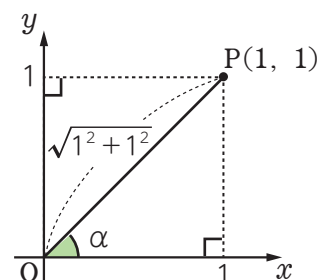
例 $\sin\theta + \cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形しなさい。

解答 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1^2 + 1^2} \sin(\theta + \alpha) = \sqrt{2} \sin(\theta + \alpha)$

ただし、 α は $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角。

したがって、 $\alpha = 45^\circ$ となるから

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$



問1 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形しなさい。

解答 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sin(\theta + \alpha) = 2 \sin(\theta + \alpha)$

ただし、 α は $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす角。

したがって、 $\alpha = 60^\circ$ となるから

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2 \sin(\theta + 60^\circ)$$

