

加法定理の応用(1)

～ 2倍角の公式 ～

講師
水谷 信也

学習のポイント

加法定理の応用の一つで2倍角の公式について、その成り立ちと使い方について学びます。

- ① 2倍角の公式とは？
- ② 2倍角の公式の特徴
- ③ 2倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

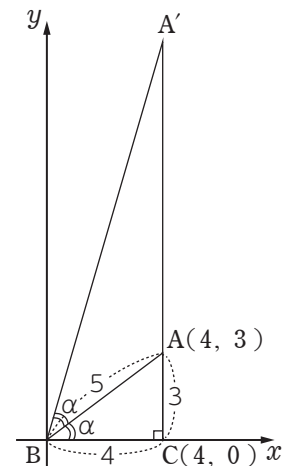
1 2倍角の公式とは？

60°は30°の2倍の大きさの角度ですが、30°のsin, cosの値や、60°のsin, cosの値は、今までの学習から値がわかるので、新しい公式の必要性は感じません。しかし、右図のように、第1象限にあり、∠Cが直角となる△ABCでAB = 5, BC = 4, CA = 3となる直角三角形を考えた場合はどうでしょうか。

∠Bをαとすると $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ となります。

$\sin 2\alpha = \frac{A'C}{A'B}$, $\cos 2\alpha = \frac{BC}{A'B}$ の値については、

図からは求められませんが、計算によって求めることができます。



2 2倍角の公式の特徴

サインの加法定理は、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

この式において、 $\beta = \alpha$ とおくと、

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \quad \text{＜サインの2倍角の公式＞}$$

コサインの加法定理は、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

同じように、 $\beta = \alpha$ とおくと、

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{＜コサインの2倍角の公式＞}$$

sinαだけを使って表すと、 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ より

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{＜sinαだけを使って表した式＞}$$

cosαだけを使って表すと、 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ より

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \text{＜cosαだけを使って表した式＞}$$

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{< } \sin\alpha \text{ だけを使って表した式 >}$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 \quad \text{< } \cos\alpha \text{ だけを使って表した式 >}$$

3 2倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

例 α が第1象限の角で、 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ のとき、 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ の値を求めなさい。

解答 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

α は第1象限の角なので、 $\cos\alpha > 0$ より

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

したがって

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$\cos\alpha$ だけを使って表した式や、 $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ の両方を使って表した式を用いた場合

$$\cos 2\alpha = 2 \times \cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$