

不等式の表す領域 (3)

講師
川崎 宜昭

～ 円を境界線とする領域 ～

不等式が表す図形について学びます。今回は、円の方程式と不等式の関係調べ、円に関する不等式が表す図形を扱います。

学習のポイント

- ① 円の方程式と不等式
- ② 不等式と円の内部・外部
- ③ 領域を表す不等式

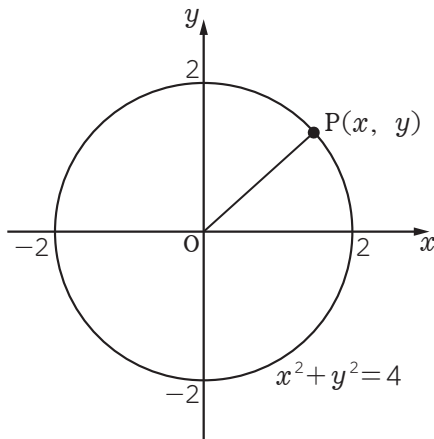
1 円の方程式と不等式

● 今までに学習した内容

$x^2 + y^2 = 4$ は何を表していますか？

$x^2 + y^2 = 4$ は中心が $O(0, 0)$ で、半径2の円 $O(0, 0)$ からの距離が2である点 $P(x, y)$ の集まりです。

$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ の両辺を2乗すると、 $x^2 + y^2 = 4$ となります。

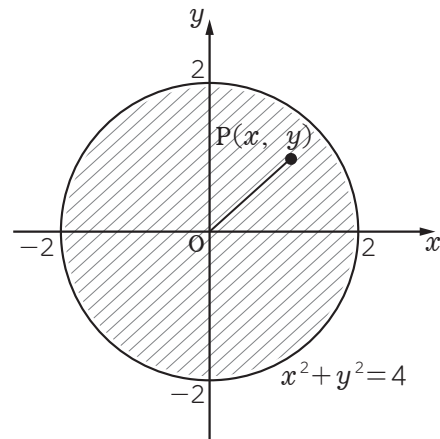


● これから学習する内容

$x^2 + y^2 < 4$ は何を表していますか？

$x^2 + y^2 < 4$ は $O(0, 0)$ からの距離が2未満である点 $P(x, y)$ の集まりです。

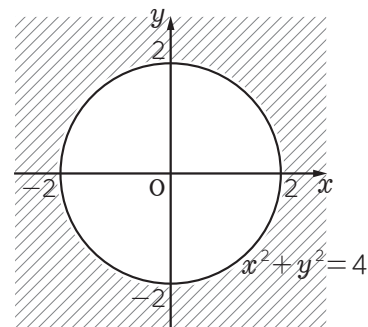
$OP = \sqrt{x^2 + y^2} < 2$ の両辺を2乗すると、 $x^2 + y^2 < 4$ となります。



境界線を含まない

上と同様に考えると、

$x^2 + y^2 > 4$ は、中心が原点 $O(0, 0)$ で半径2の円の内部を表し、境界線を含みません。

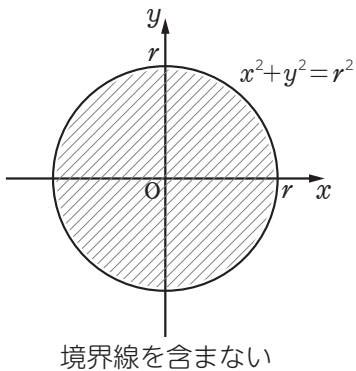


境界線を含まない

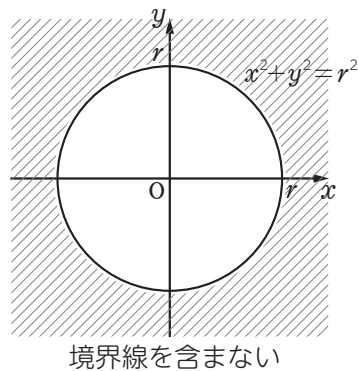
このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

2 不等式と円の内部・外部

$x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の内部



$x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の外部

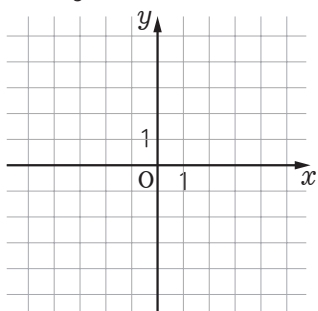


$x^2 + y^2$ の方が小さい \Leftrightarrow 円の内側！

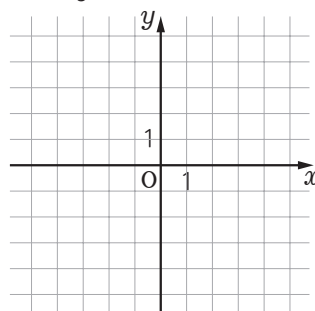
$x^2 + y^2$ の方が大きい \Leftrightarrow 円の外側！

問1 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $x^2 + y^2 < 16$



(2) $x^2 + y^2 \geq 9$



例 不等式 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 4$ の表す領域を図示しなさい。

解答

☆☆考え方☆☆

与えられた不等式を満たす点 $P(x, y)$ の集まりを考える。

境界となっている円について考える。

その円の方程式は、 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$,

円の中心は $(1, 2)$

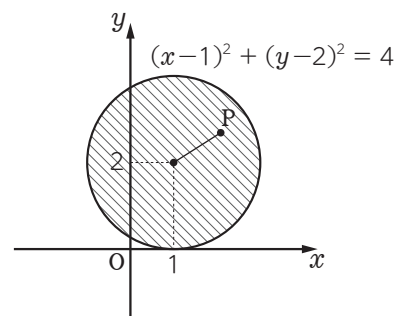
円の半径は 2

円の内部 (Pは円の中心からの距離が 2 未満)

境界線を含まない

(不等式に等号が含まれていないので、円周上の部分は含まれない。)

求める領域は右図の斜線部分で、境界線を含まない。



まとめると・・・

$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は、
円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の内部で境界を含まない

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は、
円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の外部で境界を含まない

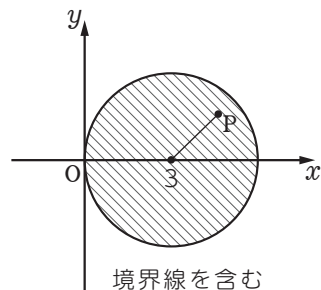
3 領域を表す不等式

今までは、不等式が与えられる ⇒ 領域を図示する。
 ここでは、領域が図示されている ⇒ 不等式を求める。

例 右の図の斜線部分の領域を表す不等式を求めなさい。

解答

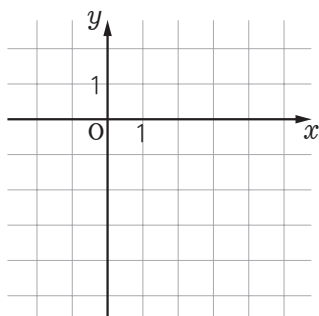
☆☆考え方☆☆
 領域内の点 $P(x, y)$ について、
 x, y が満たす条件を求める。
 境界となっている円について考える。
 円の中心は $(3, 0)$
 円の半径は 3
 円の内部 (P は円の中心からの距離が 3 以下)
 境界線を含む



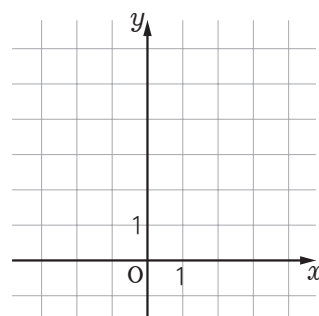
$(x - 3)^2 + y^2 = 9$ は、中心が $(3, 0)$ で半径 3 の円の円周上です。
 $(x - 3)^2 + y^2 < 9$ は、中心が $(3, 0)$ で半径 3 の円の内部で境界線を含みません。
 したがって、図の斜線分の領域を表す不等式は、
 $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$

問2 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

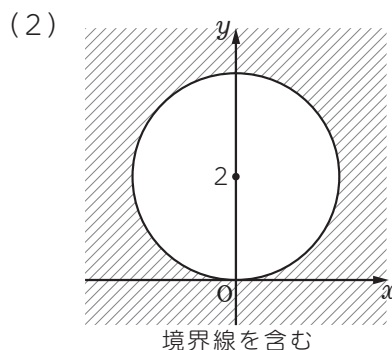
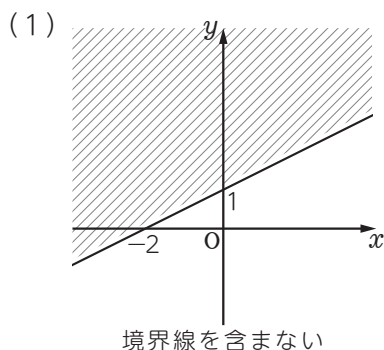
(1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 > 4$



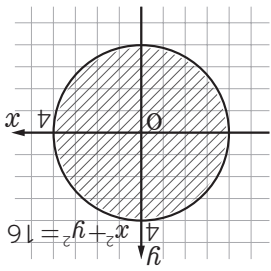
(2) $x^2 + (y - 2)^2 \leq 9$



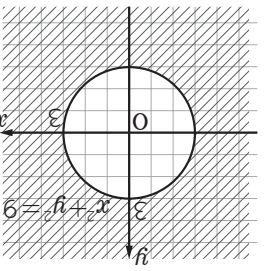
問3 次の図の斜線部分の領域を表す不等式を求めなさい。



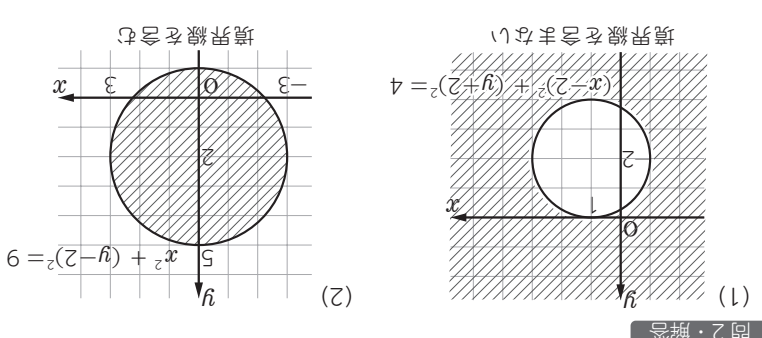
問1・解答
 (1) 中心が原点 $O(0, 0)$ で半径4の円の内部で、境界線を含まない。
 $x^2 + y^2 = 16$



問2・解答
 (2) 中心が原点 $O(0, 0)$ で半径3の円の外部で、境界線を含む。
 $x^2 + y^2 = 9$



問3・解答
 (1) $y > \frac{1}{2}x + 1$ ($x - 2y + 2 < 0$ でもよい)
 (2) $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$



(1) 境界線を含まない
 $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

(2) 境界線を含む
 $x^2 + (y - 2)^2 = 9$