

円と直線 ～ 共有点の個数 ～

講師
渡部 儀隆

学習のポイント

- ① 円と直線の共有点
- ② 共有点の個数と2次方程式
- ③ 判別式と共有点の個数

円と直線の共有点の求め方について学び、位置関係についてまとめましょう。

1 円と直線の共有点

円と直線の共有点の座標は、円の方程式と直線の方程式を組み合わせた連立方程式の解として求めることができる。

例 円 $x^2 + y^2 = 2$ と次の直線の共有点の座標を求めなさい。

- (1) $y = x$
- (2) $y = x - 2$

解答 (1) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \dots\dots ① \\ y = x & \dots\dots ② \end{cases}$$

において、②を①に代入すると

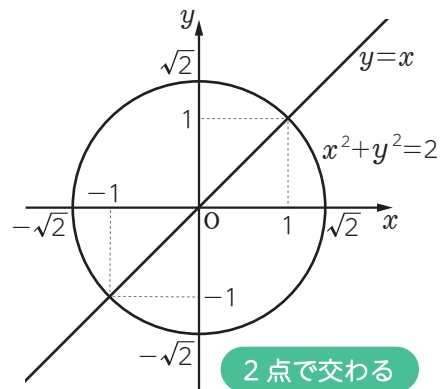
$$x^2 + x^2 = 2$$

整理すると、 $x^2 = 1$ となり $x = \pm 1$

$$x = 1 \text{ のとき、②より } y = 1$$

$$x = -1 \text{ のとき、②より } y = -1$$

よって、共有点の座標は $(1, 1), (-1, -1)$



(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \dots\dots ③ \\ y = x - 2 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

において、④を③に代入すると

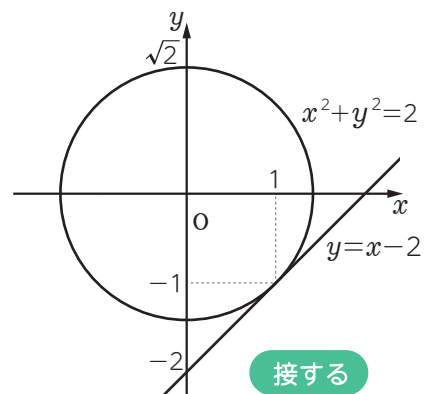
$$x^2 + (x - 2)^2 = 2$$

整理すると、 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x - 1)^2 = 0 \text{ より } x = 1$$

これを④に代入すると $y = -1$

よって、共有点の座標は $(1, -1)$



このように、円と直線がただ1点を共有するとき、円と直線は接するといひ、この直線を接線、その共有点を接点といひます。

2 共有点の個数と2次方程式

円と直線の共有点は2個または1個でした。
次に、共有点の個数について考えてみましょう。

円 $x^2 + y^2 = 2$ と直線 $y = x + 3$ は、
右の図のように共有点をもちません。

このとき、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \dots\dots ① \\ y = x + 3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

において、②を①に代入すると

$$x^2 + (x + 3)^2 = 2$$

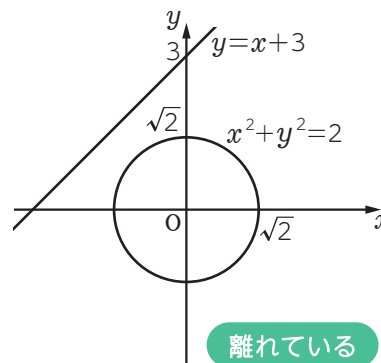
整理すると、 $2x^2 + 6x + 7 = 0 \dots\dots\dots ③$

この2次方程式の判別式 D は、

$$D = 6^2 - 4 \times 2 \times 7 = -20 < 0$$

となります。

よって、③は実数解をもちません。



★思い出そう★ 2次方程式 $ax^2 + bx + C = 0$ の判別式 D は、 $D = b^2 - 4ac$

3 判別式と共有点の個数

円と直線の方程式を連立して得られる2次方程式の判別式 D と共有点の個数の関係は、
次のようになる。

判別式	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
共有点の個数	2個	1個	なし
円と直線の位置関係	2点で交わる 	接する 	離れている