等式の証明

講師
川﨑 宜昭

文字を含んだ等式が成り立つことを証明する方法を学習しましょう。

学習のポイント
① 等式の証明とは？
② 等式 $A=B$ の証明方法
③ 条件がついているときの等式の証明

1 等式の証明とは？

等式 $(x+1)^2-2x=(x-1)^2+2x$ が成り立つことを証明

※本当に成り立つのか，実際に数値を代入して確かめてみましょう。

$x=1$ とすると，

$(x+1)^2-2x=?$　　$(x-1)^2+2x=?$

$x=3$ とすると，

$(x+1)^2-2x=?$　　$(x-1)^2+2x=?$

$A=B$ の形の等式を証明するには，

方法1「左辺と右辺を別々に計算して同じ式になることを示す」

$A=\cdots\cdots=C$　　計算していったら C になった。

$B=\cdots\cdots=C$　　計算していったらこちらも C になった。

したがって，$A=B$ が証明された！

方法2「(左辺)－(右辺)＝0になることを示す」

$A-B=\cdots\cdots=0$　　計算していったら 0 になった。

ということは，$A=B$ が証明された！

などの方法があります。

2 等式 $A = B$ の証明方法

例　等式 $(x+1)^2 - 2x = (x-1)^2 + 2x$ が成り立つことを証明しなさい。

解答　左辺と右辺を別々に計算すると　← 方法 1 を使ってみる

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (x+1)^2 - 2x \\
&= x^2 + 2x + 1 - 2x \\
&= x^2 + 1 \\
(\text{右辺}) &= (x-1)^2 + 2x \\
&= x^2 - 2x + 1 + 2x \\
&= x^2 + 1
\end{aligned}
$$

一致！

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，

$(x+1)^2 - 2x = (x-1)^2 + 2x$

が成り立つ。

問 1　次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

(2) $(x^2+1)(y^2+1) = (xy-1)^2 + (x+y)^2$

3 条件がついているときの等式の証明

例　$x + y = 1$ のとき，等式 $x^2 + y = y^2 + x$ が成り立つことを証明しなさい。

※本当に成り立つのか，実際に数値を代入して確かめてみましょう。

$x = 2$，$y = -1$ とすると，

$x^2 + y = 3$　　$y^2 + x = 3$

→ 文字の種類は，少ない方がやさしくなる！

解答　$x + y = 1$ であるから，$y = 1 - x$　← 文字の種類を減らすための方法

左辺と右辺を別々に計算すると　← 方法 1 を使ってみる

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^2 + (1 - x) \\
&= x^2 - x + 1 \\
(\text{右辺}) &= (1 - x)^2 + x \\
&= 1 - 2x + x^2 + x \\
&= x^2 - x + 1
\end{aligned}
$$

一致！

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，

$x^2 + y = y^2 + x$

が成り立つ。

例　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$ が成り立つことを証明しなさい。
（ただし，$b \neq 0$，$d \neq 0$）

※本当に成り立つのか，実際に数値を代入して確かめてみましょう。
$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=6$ とすると，

$\dfrac{a-b}{b}=?$　　$\dfrac{c-d}{d}=?$

解答　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，　　← わざわざ文字を増やす理由は・・・？

$\dfrac{a}{b}=k$ より $a=bk$，$\dfrac{c}{d}=k$ より $c=dk$　　← $(a,\ b,\ c,\ d) \to (bk,\ b,\ dk,\ d)$
4種類の文字が3種類に！

よって，

$$(\text{左辺})=\frac{bk-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$(\text{右辺})=\frac{dk-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

したがって，（左辺）＝（右辺）となるから，

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

が成り立つ。

☆別の解き方☆
$A-B=0$ を示す方法でも，等式 $A=B$ が証明できるのでしたね。
つまり，$\dfrac{a-b}{b}-\dfrac{c-d}{d}=0$ になることを示せばよいのです。

$$\frac{a-b}{b}-\frac{c-d}{d}=\frac{ad-bd-bc+bd}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

となります。
$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ の両辺に bd をかけると，$ad=bc$ となるので，$ad-bc=0$
分子の値が0となるので，（左辺）−（右辺）＝0となって証明できます。

問2　$x+y=1$ のとき，等式 $x(x+1)+y(y+1)=2(1-xy)$ が成り立つことを証明しなさい。

問3　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $a(c+d)=c(a+b)$ が成り立つことを証明しなさい。

問1・解答

(1) (左辺) $= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

(右辺) $= 2(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

が成り立つ。

(2) (左辺) $= (x^2 + 1)(y^2 + 1) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$

(右辺) $= (xy - 1)^2 + (x + y)^2 = x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，

$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (xy - 1)^2 + (x + y)^2$

が成り立つ。

問2・解答

$y = 1 - x$ とおく。

(左辺) $= x(x + 1) + y(y + 1)$

$= x(x + 1) + (1 - x)\{(1 - x) + 1\}$

$= x^2 + x + (1 - x)(2 - x)$

$= x^2 + x + (2 - 3x + x^2)$

$= x^2 + x + 2 - 3x + x^2$

$= 2x^2 - 2x + 2$

$= 2(x^2 - x + 1)$

(右辺) $= 2(1 - xy)$

$= 2\{1 - x(1 - x)\}$

$= 2(x^2 - x + 1)$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，$x + y = 1$ のとき，

$x(x + 1) + y(y + 1) = 2(1 - xy)$

が成り立つ。

問3・解答

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ とおくと，$\dfrac{a}{b} = k$ より $a = bk$，$\dfrac{c}{d} = k$ より $c = dk$

よって，(左辺) $= a(c + d) = bk(dk + d) = bdk(k + 1)$

(右辺) $= c(a + b) = dk(bk + b) = bdk(k + 1)$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，

$a(c + d) = c(a + b)$