第14回　第1章　方程式・式と証明「高次方程式」

高次方程式 (2)

講師
川﨑 宜昭

高次方程式を解く方法として，因数定理を用いて解く方法を学習しましょう。

学習のポイント
① 因数分解による解法 ～文字で置き換える～
② 因数定理の復習
③ 因数定理を利用した解法

1 因数分解による解法 ～文字で置き換える～

例　方程式 $x^4+3x^2-4=0$ を解きなさい。

解答　$x^2=X$ とおくと　← 複二次式（次数がすべて偶数である多項式）の場合，このような 置き換えをするとよい。

$X^2+3X-4=0$

X について因数分解すると，

$(X-1)(X+4)=0$

$(x^2-1)(x^2+4)=0$　← $(x-1)(x+1)(x^2+4)=0$ と因数分解してもよい。

よって，$x^2-1=0$　または　$x^2+4=0$

$x^2=1$　より，$x=\pm 1$　← $x^2-1=0$ から $(x-1)(x+1)=0$

$x^2=-4$　より，$x=\pm 2i$

したがって、$x=\pm 1,\ \pm 2i$　← 4次方程式なので4個の解がある。

2 因数定理の復習

●因数とは？

x^2-1 は, $x^2-1=(x-1)(x+1)$ と因数分解されるので,

x^2-1 の因数は $x-1$ と $x+1$

●$x-\alpha$ が整式 $P(x)$ の因数であれば？

$x-\alpha$ が整式 $P(x)$ の因数であれば，$P(x)$ をわられる式，$x-\alpha$ をわる式と考えて，

$P(x)=(x-\alpha)Q(x)\cdots$★

この式で, $P(\alpha)=0$ となる。

★の式から，

「$P(x)$ が $x-\alpha$ を因数に含む」 $\Longleftrightarrow$ 「$P(\alpha)=0$」

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

因数定理

整式 $P(x)$ において，「$P(\alpha) = 0$」 $\Longleftrightarrow$ 「$x - \alpha$ は $P(x)$ の因数」

例えば，
$P(1) = 0$ ならば，$P(x)$ は $x - 1$ を因数に含む。
$P(-2) = 0$ ならば，$P(x)$ は $x + 2$ を因数に含む。　← $x - (-2) = x + 2$

3 因数定理を利用した解法

例　次の方程式を解きなさい。
(1) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$　　(2) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$

解答　(1) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ とおくと，
$P(x)$ が $x - \alpha$ という因数をもつならば，
$\alpha = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 10$　← 正負を含めて10の約数
$P(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 10 = 0$
であるから，$x - 1$ は $P(x)$ の因数である。
右のわり算より
$P(x) = (x - 1)(x^2 - 3x - 10)$
よって
$(x - 1)(x^2 - 3x - 10) = 0$
$(x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$
$x - 1 = 0$ または $x + 2 = 0$ または $x - 5 = 0$
したがって，$x = 1,\ -2,\ 5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x - 10 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 4x^2 - 7x + 10 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & -3x^2 - 7x \\
 & -3x^2 + 3x \\
\hline
 & -10x + 10 \\
 & -10x + 10 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(2) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$ とおくと，
$P(x)$ が $x - \alpha$ という因数をもつならば，
$\alpha = \pm 1,\ \pm 2$　← 正負を含めて2の約数
$P(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 7 \times 2 - 2 = 0$
であるから，$x - 2$ は $P(x)$ の因数である。
右のわり算より
$P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
よって
$(x - 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$
$x - 2 = 0$ または $x^2 - 3x + 1 = 0$
したがって，$x = 2,\ \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & -3x^2 + 7x \\
 & -3x^2 + 6x \\
\hline
 & x - 2 \\
 & x - 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

問 1　次の方程式を解きなさい。

（1）$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$　　（2）$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

問 2　次の方程式を解きなさい。

（1）$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$　　（2）$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

（3）$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$　　（4）$x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

問 1・解答

(1) $x = \pm 1,\ \pm 3$　　(2) $x = \pm 2,\ \pm 3i$

問 2・解答

(1) $x = 1,\ 2,\ 3$　　(2) $x = -3,\ 1,\ 5$

(3) $x = 2,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　　(4) $x = -1,\ 1 \pm \sqrt{3}$

このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。